

SÉRIE A, N° 1190

N° D'ORDRE :

2057

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Paul SOLEILLET

AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

1^{re} THÈSE. — SUR LES PARAMÈTRES CARACTÉRISANT LA POLARISATION PARTIELLE DE LA LUMIÈRE DANS LES PHÉNOMÈNES DE FLUORESCENCE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1^{er} Mars 1929 devant la Commission d'examen.

MM. JEAN PERRIN *Président.*

EUGÈNE BLOCH.....

LÉON BRILLOUIN... } *Examineurs.*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1929

SÉRIE A, N° 1190

N° D'ORDRE :

2057

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Paul SOLEILLET

AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

1^{re} THÈSE. — SUR LES PARAMÈTRES CARACTÉRISANT LA POLARISATION PARTIELLE DE LA LUMIÈRE DANS LES PHÉNOMÈNES DE FLUORESCENCE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **Mars 1929** devant la Commission d'examen.

MM. JEAN PERRIN *Président.*

EUGÈNE BLOCH..... } *Examineurs.*
LÉON BRILLOUIN... }

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1929

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..... G. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Doyens honoraires.. P. APPELL, M. MOLLIARD.

Profess. honoraires..	{	V. BOUSSINESQ.	A. FERNBACH.
		A. JOANNIS.	A. LEDUC.
		H. LE CHATELIER.	R. DONGIER.
		H. LEBESGUE.	E. HEROUARD.

Professeurs	ÉMILE PICARD.....	Analyse supér. et algèbre supérieure.
	G. KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET.....	Electrotechnique générale.
	F. WALLERANT...	Minéralogie.
	H. ANDOYER.....	Astronomie.
	P. PAINLEVÉ.....	Mécanique anal. et mécanique céleste.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés)
	G. URBAIN.....	Chimie générale.
	ÉMILE BOREL.....	Calcul des probabilités et phys. mathém.
	L. MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. ABRAHAM.....	Physique.
	M. MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	E. CARTAN.....	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE.....	Physiologie générale.
	E. VESSIOT.....	Théorie des fonct. et th. des transf.
	A. COTTON.....	Physique générale.
	J. DRACH.....	Application de l'analyse à la géométrie.
	CHARLES FABRY...	Physique.
	CHARLES PÉREZ...	Zoologie.
	LÉON BERTRAND...	Géolog. structural et géolog. appliquée.
	R. LESPIEAU.....	Théories chimiques.
	E. RABAUD.....	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER.....	Physiologie comparée.
	E. BLAISE.....	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD..	Botanique.
P. MONTEL.....	Mécanique rationnelle.	
P. WINTREBERT...	Anatomie et histologie comparées.	
O. DUBOSCO.....	Biologie maritime.	
G. JULIA.....	Mathématiques générales.	
A. MAILHE.....	Etude des combustibles.	
L. LUTAUD.....	Géogr. physique et géol. dynamique.	
EUGÈNE BLOCH.....	Physique théorique et phys. céleste.	
HENRI VILLAT.....	Mécanique des fluides et applications.	
CH. JACOB.....	Géologie.	
P. PASCAL.....	Chimie minérale.	
LÉON BRILLOUIN..	Théories physiques.	
N.....	Chimie appliquée.	



E. PECHARD....	Chimie (Ens. P. C. N.)	H. MOUTON.....	Chimie physique.
V. AUGER.....	Chimie analytique.	L. JOLEAUD.....	Paléontologie.
M. GUICHARD....	Chimie minérale.	M. JAVILLIER....	Chimie biologique.
A. GUILLET.....	Physique.	A. DUFOUR.....	Physique (P. C. N.).
C. MAUGUIN....	Minéralogie.	F. PICARD.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
L. BLARINGHEM	Botanique.	ROBERT-LÉVY...	Zoologie.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.	L. DUNOYER.....	Optique appliquée.
A. DEREIMS....	Géologie.	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
A. DENJOY.....	Calcul diff. et int.	A. DEBIERNE....	Radioactivité.
H. BENARD.....	Physique (P. C. N.).	M. FRECHET.....	Calcul des probabilités et Physiques math.
E. DARMOIS....	Physique.		
G. BRUHAT.....	Physique.		

Secrétaire..... DANIEL TOMBECK.

A MES PARENTS

A MA FEMME

A Monsieur PAUL LANGEVIN

Hommage de respectueuse reconnaissance.

SUR LES PARAMÈTRES CARACTÉRISANT LA POLARISATION PARTIELLE DE LA LUMIÈRE DANS LES PHÉNOMÈNES DE FLUORESCENCE

Par M. PAUL SOLEILLET.

PREMIÈRE PARTIE

Relations générales entre l'excitation et l'émission.

1. Introduction. — La polarisation des radiations émises par résonance optique des vapeurs métalliques dépend d'un grand nombre de paramètres : nature du métal, longueur d'onde de la radiation de résonance utilisée, pression et température de la vapeur, présence de gaz étrangers, existence de champs magnétiques ou électriques. Elle dépend également de la polarisation de la lumière excitatrice, de sa direction et de celle de la lumière observée. Moyennant quelques hypothèses on peut trouver théoriquement les lois suivant lesquelles ces derniers paramètres influent sur l'état de la polarisation en général partielle du faisceau étudié. Nous insisterons d'abord sur le choix qui a été fait des quantités qui permettent de définir l'état de polarisation d'un faisceau de lumière homogène.

Nous étudierons ensuite les relations qui existent entre les polarisations des faisceaux émis par une même source dans les diverses directions de l'espace et les quantités caractéristiques d'une telle émission. Ensuite nous chercherons l'in-

fluence sur cette émission de la polarisation de la lumière excitatrice et aussi de la direction de sa propagation. Les lois obtenues, n'introduisant qu'un nombre fini de constantes à déterminer, permettent, avec un nombre fini d'expériences, de connaître tous les résultats correspondant à un même état de la source antérieurement à l'excitation.

2. Quantités caractéristiques d'un faisceau de lumière partiellement polarisée. — On sait qu'un faisceau homogène de lumière quelconque peut toujours être considéré comme constitué d'un mélange de lumière naturelle et de lumière elliptique. Son intensité et son état de polarisation pourront donc être définis par la connaissance de 4 quantités : intensité de la lumière naturelle, intensité de la lumière elliptique, azimut des axes de l'ellipse et ellipticité de celle-ci.

Stokes a montré qu'on pouvait utiliser 4 autres quantités. Nous allons montrer comment elles s'introduisent et en donner une interprétation. Nous emploierons par la suite 4 quantités liées linéairement à celles-ci.

3. Introduction des quantités I, M, C, S. — Nous supposons, pour l'instant, qu'une lumière partiellement polarisée est toujours, pendant une durée suffisamment courte, totalement polarisée, cette polarisation étant en général elliptique. Cette polarisation varie au cours du temps et nos observations ne portent que sur des moyennes.

Nous décomposerons l'unité de temps en un nombre assez grand N d'intervalles égaux. Pendant l'un quelconque de ces intervalles, la vibration du vecteur lumineux électrique sera purement elliptique. Après un choix d'axes rectangulaires Ox , Oy perpendiculaires à la direction du faisceau, cette vibration sera représentée par les équations :

$$(1) \quad x_i = p_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad y_i = q_i \cos(\omega t + \beta_i).$$

i étant un indice désignant l'intervalle considéré.

L'une des moyennes accessibles expérimentalement est l'intensité :

$$I = \frac{1}{N} \sum_1^N (p_i^2 + q_i^2).$$

Afin d'en obtenir d'autres nous transformerons, avant l'étude photométrique, l'ensemble des vibrations par des parcours optiques variés. Utilisons par exemple l'effet successif des passages suivants :

1° Traversée d'une lame cristalline mince d'épaisseur variable. Si l'axe lent de la lame est dirigé suivant Ox et si le retard est égal à φ , la vibration d'indice i deviendra :

$$(2) \quad x'_i = p_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad y'_i = q_i \cos(\omega t + \beta_i + \varphi).$$

2° Traversée d'un appareil genre nicol ne laissant passer que la composante suivant un axe privilégié Ox'' faisant avec Ox l'angle ψ (positif dans le sens Ox , Oy) :

$$(3) \quad x''_i = p_i \cos(\omega t + \alpha_i) \cos \psi + q_i \cos(\omega t + \beta_i + \varphi) \sin \psi.$$

L'intensité I'' est donnée alors par la formule :

$$\begin{aligned} I'' &= \frac{1}{N} \sum_1^N \{ p_i^2 \cos^2 \psi + q_i^2 \sin^2 \psi + 2p_i q_i \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot \cos(\beta_i - \alpha_i + \varphi) \} \\ (4) \quad I'' &= \frac{1}{N} \sum_1^N \left\{ \frac{1}{2} (p_i^2 + q_i^2) + \frac{1}{2} (p_i^2 - q_i^2) \cos 2\psi \right. \\ &\quad \left. + p_i q_i \cos(\beta_i - \alpha_i) \sin 2\psi \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - p_i q_i \sin(\beta_i - \alpha_i) \sin 2\psi \sin \varphi \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons déjà posé :

$$I = \frac{1}{N} \sum_1^N (p_i^2 + q_i^2).$$

Nous poserons :

$$(5) \quad M = \frac{1}{N} \sum_1^N (p_i^2 - q_i^2)$$

$$C = \frac{2}{N} \sum_1^N p_i q_i \cos(\beta_i - \alpha_i); \quad S = \frac{2}{N} \sum_1^N p_i q_i \sin(\beta_i - \alpha_i).$$

Nous obtenons la formule :

$$(6) \quad 2I'' = I + M \cos 2\psi + C \sin 2\psi \cos \varphi - S \sin 2\psi \sin \varphi.$$

En faisant varier ψ et φ l'étude photométrique nous permet la connaissance des 4 quantités :

I, M, C, S.

Ce sont d'ailleurs celles que Stokes (1) a désignées dans l'ordre par :

A, C, D, B.

4. Interprétation de ces quantités à l'aide de la sphère de Poincaré. — Une interprétation géométrique très simple est possible à l'aide de la sphère de Poincaré. On sait qu'une vibration elliptique quelconque y est représentée par un point. Un grand cercle, appelé équateur, représente l'ensemble des vibrations linéaires, la vibration linéaire suivant Ox correspondant à un point X de l'équateur. Ce point X permet de définir un premier méridien. Une vibration elliptique quelconque est alors représentée par un point dont la demi-longitude est égale à l'angle du grand axe de l'ellipse avec l'axe Ox et dont la demi-latitude a pour tangente trigonométrique le rapport des axes de l'ellipse. A chaque intervalle de temps correspondra un vecteur V_i partant du centre de la sphère et dirigé vers le point représentatif de la vibration

(1) STOKES. *Philosophical Magazine*, 3, p. 316 (1852).

elliptique qui a lieu pendant cet intervalle. Nous lui donnerons une longueur égale à $I_i = \frac{p_i^2 + q_i^2}{N}$, c'est-à-dire à la contribution de cette vibration à l'intensité totale. La quantité I est la somme arithmétique de ces vecteurs. Rapportons la sphère à des axes rectangulaires OX, OY, OZ , le plan OX, OY étant le plan équatorial. Nous allons montrer que les quantités M, C, S sont respectivement sur ces axes les projections d'un vecteur V somme géométrique des vecteurs V_i .

En effet θ_i étant l'angle de V_i avec OX on sait que :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_i}{2} = \frac{p_i}{q_i}.$$

D'autre part, l'angle du plan V_i, OX avec le plan équatorial OX, OY est égal à $\beta_i - \alpha_i$.

Les projections du vecteur V_i sur les 3 axes sont donc :

$$M_i = I_i \cos \theta_i = I_i \frac{p_i^2 - q_i^2}{p_i^2 + q_i^2} = \frac{p_i^2 - q_i^2}{N}$$

$$\begin{aligned} C_i &= I_i \sin \theta_i \cos (\beta_i - \alpha_i) = I_i \frac{2p_i q_i \cos (\beta_i - \alpha_i)}{p_i^2 + q_i^2} \\ &= \frac{2p_i q_i \cos (\beta_i - \alpha_i)}{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i &= I_i \sin \theta_i \sin (\beta_i - \alpha_i) = I_i \frac{2p_i q_i \sin (\alpha_i - \beta_i)}{p_i^2 + q_i^2} \\ &= -\frac{2p_i q_i \sin (\beta_i - \alpha_i)}{N}. \end{aligned}$$

Et les sommations de ces quantités par rapport à i fournissent bien M, C, S .

$$M = \sum_1^N M_i \quad C = \sum_1^N C_i \quad S = \sum_1^N S_i$$

tandis que :

$$I = \sum_i^N I_i.$$

Pour les quantités élémentaires on a la relation :

$$(1) \quad I_i^2 = M_i^2 + C_i^2 + S_i^2,$$

qui se réduit dans le cas général à l'inégalité :

$$(2) \quad I^2 \geq M^2 + C^2 + S^2$$

l'égalité n'ayant lieu que si la vibration n se fait toujours suivant une ellipse semblable, c'est-à-dire quand la lumière est totalement polarisée.

5. Introduction des quantités μ , ν , γ , σ . — Dans les calculs qui suivront, il sera plus commode d'utiliser d'autres quantités liées linéairement à celles-ci. Nous poserons :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{1}{N} p_i^2 & \nu_i &= \frac{1}{N} q_i^2 & \gamma_i &= \frac{1}{N} p_i q_i \cos(\beta_i - \alpha_i) \\ \sigma_i &= \frac{1}{N} p_i q_i \sin(\beta_i - \alpha_i). \end{aligned}$$

Les nouvelles quantités introduites seront :

$$\mu = \sum_i^N \mu_i \quad \nu = \sum_i^N \nu_i \quad \gamma = \sum_i^N \gamma_i \quad \sigma = \sum_i^N \sigma_i.$$

On voit que l'on a :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{I + M}{2} & \nu &= \frac{I - M}{2} \\ \gamma &= \frac{C}{2} & \sigma &= \frac{S}{2} \end{aligned} \right.$$

6. Ces quantités définissent complètement la lumière au point de vue expérimental. — Nous allons montrer maintenant que ces quantités sont les seules que l'on peut déduire d'un examen photométrique semblable à celui que nous avons décrit, mais

avec une plus grande complexité de trajet optique. Nous montrerons en effet que les quantités μ' , ν' , γ' , σ' ou I'M'C'S' caractéristiques de la lumière après le parcours effectué s'expriment uniquement en fonction de celles μ , ν , γ , σ ou I, M, C, S caractérisant la lumière antérieurement au parcours. Il nous suffira de montrer pour cela que μ'_i , ν'_i , γ'_i , σ'_i s'expriment linéairement en fonction de μ_i , ν_i , γ_i , σ_i . Les mêmes relations avec les mêmes coefficients exprimeront μ' , ν' , γ' , σ' en fonction de μ , ν , γ , σ .

Dans le cas le plus général une vibration :

$$(1) \quad \begin{cases} x = p_i \cos \omega t \\ y = 0 \end{cases}$$

sera transformée à la sortie en :

$$(2) \quad \begin{cases} x' = a_1 p_i \cos(\omega t + \delta_1) \\ y' = a_2 p_i \cos(\omega t + \delta_2) \end{cases}$$

et une autre :

$$(3) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = q_i \cos \omega t \end{cases}$$

sera transformée en :

$$(4) \quad \begin{cases} x' = a_3 q_i \cos(\omega t + \delta_3) \\ y' = a_4 q_i \cos(\omega t + \delta_4) \end{cases}$$

Par suite des interférences, la vibration générale :

$$(5) \quad \begin{cases} x = p_i \cos(\omega t + \alpha_i) \\ y = q_i \cos(\omega t + \beta_i) \end{cases}$$

deviendra :

$$\begin{cases} x' = a_1 p_i \cos(\omega t + \delta_1 + \alpha_i) + a_3 q_i \cos(\omega t + \delta_3 + \beta_i) \\ y' = a_2 p_i \cos(\omega t + \delta_2 + \alpha_i) + a_4 q_i \cos(\omega t + \delta_4 + \beta_i) \end{cases}$$

Ces équations pourront être mises sous la forme :

$$\begin{cases} x' = p_i \cos (\omega t + \alpha'_i) \\ y' = q_i \cos (\omega t + \beta'_i) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} p'_i \cos \alpha'_i &= a_1 p_i \cos (\delta_1 + \alpha_i) + a_3 q_i \cos (\delta_3 + \beta_i) \\ p'_i \sin \alpha'_i &= a_1 p_i \sin (\delta_1 + \alpha_i) + a_3 q_i \sin (\delta_3 + \beta_i) \\ q'_i \cos \beta'_i &= a_2 p_i \cos (\delta_2 + \alpha_i) + a_4 q_i \cos (\delta_4 + \beta_i) \\ q'_i \sin \beta'_i &= a_2 p_i \sin (\delta_2 + \alpha_i) + a_4 q_i \sin (\delta_4 + \beta_i). \end{aligned}$$

Les calculs effectués permettent d'obtenir les résultats suivants :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \mu'_i &= \mu_i a_1^2 + \nu_i a_3^2 \\ &\quad + \gamma_i 2a_1 a_3 \cos (\delta_3 - \delta_1) \\ &\quad - \sigma_i 2a_1 a_3 \sin (\delta_3 - \delta_1) \\ \nu'_i &= \mu_i a_2^2 + \nu_i a_4^2 \\ &\quad + \gamma_i 2a_2 a_4 \cos (\delta_4 - \delta_2) \\ &\quad - \sigma_i 2a_2 a_4 \sin (\delta_4 - \delta_2) \\ \gamma'_i &= \mu_i a_1 a_2 \cos (\delta_2 - \delta_1) + \nu_i a_3 a_4 \cos (\delta_4 - \delta_3) \\ &\quad + \gamma_i [a_2 a_3 \cos (\delta_3 - \delta_2) + a_1 a_4 \cos (\delta_4 - \delta_1)] \\ &\quad - \sigma_i [a_2 a_3 \sin (\delta_3 - \delta_2) + a_1 a_4 \sin (\delta_4 - \delta_1)] \\ \sigma'_i &= \mu_i a_1 a_2 \sin (\delta_2 - \delta_1) + \nu_i a_3 a_4 \sin (\delta_4 - \delta_3) \\ &\quad + \gamma_i [a_1 a_4 \sin (\delta_4 - \delta_1) - a_2 a_3 \sin (\delta_3 - \delta_2)] \\ &\quad - \sigma_i [a_1 a_4 \cos (\delta_4 - \delta_1) - a_2 a_3 \cos (\delta_3 - \delta_2)] \end{aligned} \right.$$

On en conclut que μ' , ν' , γ' , σ' sont des fonctions linéaires et homogènes de μ , ν , γ , σ et que de même I' , M' , C' , S' sont des fonctions linéaires et homogènes de I , M , C , S .

7. Remarque sur les transformations relatives aux I , M , C , S .

— Il est facile d'étudier ces dernières relations grâce à la

remarque suivante. Si la lumière à l'entrée est totalement polarisée, $I^2 - M^2 - C^2 - S^2 = 0$, mais alors elle est aussi totalement polarisée à la sortie et $I'^2 - M'^2 - C'^2 - S'^2 = 0$. Les transformations qui font passer des I, M, C, S aux I', M', C', S' possèdent l'invariant relatif $I^2 - M^2 - C^2 - S^2 = 0$. Il en résulte :

$$(1) \quad I'^2 - M'^2 - C'^2 - S'^2 = K^2(I^2 - M^2 - C^2 - S^2).$$

Cet ensemble de transformations à 7 paramètres (les 4 paramètres α et les 3 différences δ) peut être considéré comme formé par l'ensemble des rotations dans l'univers de Minkowski (6 paramètres) et d'une homothétie (1 paramètre). On peut toujours ramener une quelconque de ces transformations à la succession des 3 transformations suivantes. La première et la troisième conservant I , mais faisant tourner M, C, S dans l'espace et l'autre étant une transformation de Lorentz, la vitesse de la lumière étant 1 et le choix de l'unité de longueur étant arbitraire dans les deux systèmes.

$$(2) \quad \begin{aligned} M' &= \frac{K}{\sqrt{1-v^2}} (M - vI) \\ C' &= KC \\ S' &= KS \\ I' &= \frac{K}{\sqrt{1-v^2}} (I - vM) \end{aligned}$$

v et K ne peuvent être complètement arbitraires car la condition $I' \leq 1$ entraîne la condition $K \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \leq 1$. Le cas le plus intéressant est celui où $v = 1$, alors $K = 0$ et la transformation dégénère. Dans ce cas, la vibration sortante est toujours totalement polarisée et si la vibration incidente est convenable il peut y avoir extinction. Cette extinction exige d'ailleurs une lumière incidente totalement polarisée. On peut dire qu'un parfait polarisateur est aussi un analyseur parfait.

8. Faisceaux équivalents. — Nous avons ainsi montré que deux faisceaux caractérisés par les mêmes valeurs des quantités μ, ν, γ, σ ou I, M, C, S présentent à l'analyse expérimentale qui ne peut saisir que des moyennes, une similitude complète. Ils sont dits équivalents (Stokes).

9. Interférence de deux faisceaux sans cohérence. Additivité des μ, ν, γ, σ . — Considérons maintenant l'effet de l'interférence de deux faisceaux polarisés l'un et l'autre d'une façon quelconque. L'unité de temps sera encore divisée en N intervalles, pendant chacun desquels la polarisation des lumières interférentes et résultante demeurera purement elliptique. Pour l'un des faisceaux, la vibration s'écrira :

$$\begin{cases} x_i = p_i \cos(\omega t + \alpha_i) \\ y_i = q_i \cos(\omega t + \beta_i) \end{cases}$$

pour l'autre :

$$\begin{cases} x'_i = p'_i \cos(\omega t + \alpha'_i) \\ y'_i = q'_i \cos(\omega t + \beta'_i) \end{cases}$$

et pour le faisceau résultant :

$$\begin{cases} x''_i = x_i + x'_i = p''_i \cos(\omega t + \alpha''_i) \\ y''_i = y_i + y'_i = q''_i \cos(\omega t + \beta''_i) \end{cases}$$

Un calcul simple nous donne pour ce faisceau :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \mu''_i &= \frac{1}{N} \{ p_i^2 + p_i'^2 + 2p_i p'_i \cos(\alpha'_i - \alpha_i) \} \\ \nu''_i &= \frac{1}{N} \{ q_i^2 + q_i'^2 + 2q_i q'_i \cos(\beta'_i - \beta_i) \} \\ \gamma''_i &= \frac{1}{N} \{ p_i q_i \cos(\beta_i - \alpha_i) + p'_i q'_i \cos(\beta'_i - \alpha'_i) \\ &\quad + q'_i p_i \cos(\alpha_i - \beta'_i) + q_i p'_i \cos(\alpha'_i - \beta_i) \} \\ \sigma''_i &= \frac{1}{N} \{ p_i q_i \sin(\beta_i - \alpha_i) + p'_i q'_i \sin(\beta'_i - \alpha'_i) \\ &\quad + q'_i p_i \sin(\beta'_i - \alpha_i) + q_i p'_i \sin(\beta_i - \alpha'_i) \} \end{aligned} \right.$$

On sommera par rapport à i pour avoir $\mu'', \nu'', \gamma'', \sigma''$.

Si nous supposons maintenant que les faisceaux interférents ne présentent entre eux aucune cohérence toutes les quantités contenant une ligne trigonométrique d'une différence de deux phases appartenant à l'un et à l'autre faisceau fourniront une somme nulle.

On aura alors :

$$(2) \quad \begin{cases} \mu'' = \mu + \mu' & \nu'' = \nu + \nu' \\ \gamma'' = \gamma + \gamma' & \sigma'' = \sigma + \sigma' \end{cases}$$

Ainsi la superposition de deux lumières sans cohérence conduit à l'addition des quantités μ, ν, γ, σ ou I, M, C, S , relatives aux faisceaux superposés.

10. Lumière totalement ou partiellement polarisée. Exemples. — Une vibration rectiligne suivant Ox est représentée par :

$$\begin{cases} M = I & C = 0 & S = 0 \\ \mu = I & \nu = 0 & \gamma = 0 & \sigma = 0. \end{cases}$$

Une vibration rectiligne faisant avec Ox l'angle θ :

$$\begin{cases} M = I \cos 2\theta & C = I \sin 2\theta & S = 0 \\ \mu = I \cos^2 \theta; & \nu = I \sin^2 \theta; & \gamma = I \sin \theta \cos \theta; & \sigma = 0. \end{cases}$$

Une vibration rectiligne quelconque est caractérisée par :

$$S = 0 \quad \sigma = 0.$$

Une vibration circulaire est représentée par :

$$\begin{cases} M = 0 & C = 0 & S = \pm I \\ \mu = \frac{I}{2} & \nu = \frac{I}{2} & \gamma = 0 & \sigma = \pm \frac{I}{2} \end{cases}$$

Deux vibrations qui ne diffèrent que par le sens du parcours de l'ellipse ont les mêmes caractéristiques sauf que S et σ changent de signe.

Une symétrie par rapport à l'axe Ox ou Oy change les signes de γ, C, σ, S .

La lumière naturelle est caractérisée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = C = S = 0 \\ \lambda = \mu = \frac{1}{2} \quad \gamma = 0 \quad \sigma = 0. \end{array} \right.$$

Dans le cas général une lumière de paramètre I, M, C, S peut être considérée comme la somme d'une lumière purement elliptique de paramètres $\sqrt{M^2 + C^2 + S^2}$, M, C, S et d'une lumière naturelle. Le taux de polarisation est le rapport entre l'intensité de la lumière elliptique et l'intensité de la lumière totale :

$$p = \frac{\sqrt{M^2 + C^2 + S^2}}{I} = \frac{\sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4\gamma^2 + 4\sigma^2}}{\lambda + \mu}$$

Ainsi si $\gamma = 0, \sigma = 0$, la lumière se compose de lumière naturelle et de lumière linéairement polarisée suivant Ox ou Oy selon que μ est supérieur ou inférieur à ν et le taux de polarisation est :

$$p = \frac{|\lambda - \mu|}{\lambda + \mu}$$

Si $\lambda = \mu, \gamma = 0$, la lumière ajoutée à la lumière naturelle est polarisée circulairement et le taux de polarisation est :

$$p = \frac{|\sigma|}{\lambda}.$$

11. Etude expérimentale de la polarisation d'un faisceau. —

Après un choix d'axes Ox, Oy , il s'agit de mesurer les rapports des quantités I, M, C, S ou μ, ν, γ, σ .

Si la source initiale est d'intensité constante il suffira d'appliquer la méthode du paragraphe 3, c'est-à-dire faire des mesures d'intensité en donnant aux angles φ et ψ des couples différents de valeurs en nombre assez grand pour déterminer tous les coefficients I, M, C, S de la formule :

$$2I'' = I + M \cos 2\psi + C \sin 2\psi \cos \varphi - S \sin 2\psi \sin \varphi.$$

Si la source est d'intensité variable sans régularité, il est commode d'opérer de la façon suivante. On remplacera le second appareil, genre nicol, par un biréfringent donnant deux faisceaux polarisés rectilignement à angle droit dont on mesurera le rapport des intensités.

Il suffira d'effectuer les 3 mesures suivantes :

1° On ne met pas de lame cristalline avant l'analyseur ($\varphi = 0$) et on tourne l'analyseur de façon que les deux faisceaux sortants soient polarisés l'un suivant Ox ($\psi = 0$) et l'autre suivant Oy ($\psi = \frac{\pi}{2}$). On mesurera r_1 rapport de l'intensité du premier faisceau à celle du second. On a :

$$(1) \quad r_1 = \frac{I + M}{I - M} \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{I} = \frac{r_1 - 1}{r_1 + 1}$$

2° On tourne le polariseur de l'angle $+\frac{\pi}{4}$. Le nouveau rapport mesuré r_2 est donné par :

$$(2) \quad r_2 = \frac{I + C}{I - C} \quad \text{d'où} \quad \frac{C}{I} = \frac{r_2 - 1}{r_2 + 1}$$

3° On met une lame cristalline quart d'onde l'axe rapide suivant Ox , créant ainsi suivant Ox une avance de $\frac{\pi}{2}$. Alors $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. On laisse l'analyseur comme précédemment. On a :

$$(3) \quad r_3 = \frac{I + S}{I - S} \quad \text{d'où} : \quad \frac{S}{I} = \frac{r_3 - 1}{r_3 + 1}$$

On voit comment on peut ainsi déterminer expérimentalement les quantités :

$$\frac{M}{I} = \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} \quad \frac{C}{I} = \frac{2\nu}{\mu + \nu} \quad \frac{S}{I} = \frac{2\sigma}{\mu + \nu}$$

Il convient de donner un nom à ces quantités. Revenons à la représentation à l'aide de la sphère de Poincaré. Soit un type de vibration totalement polarisée caractérisé par un point P quelconque de la sphère et soit V la pro-

jection sur la direction définie par ce point P du vecteur M, C, S. Nous proposerons de définir par *taux de polarisation relativement à l'ellipse définie avec son sens de parcours par le point P* la quantité $\frac{V}{I}$. Nous voyons que V coïncide avec le vecteur, M, C, S si l'on a choisi pour P le point défini précisément par M, C, S et la quantité $\frac{V}{I}$ est bien ce qu'on désigne couramment par taux de polarisation p de la lumière étudiée. Avec la convention faite nous voyons que les quantités $\frac{M}{I}$, $\frac{C}{I}$, $\frac{S}{I}$ sont respectivement les taux de polarisation relativement à Ox, relativement à la droite faisant avec Ox l'angle $+\frac{\pi}{4}$ et relativement au cercle parcouru dans le sens positif.

On remarquera que entre les 3 taux de polarisation relative $\frac{M}{I}$, $\frac{C}{I}$, $\frac{S}{I}$ et le taux p de polarisation vraie, il y a la relation :

$$(4) \quad p^2 = \left(\frac{M}{I}\right)^2 + \left(\frac{C}{I}\right)^2 + \left(\frac{S}{I}\right)^2.$$

Cette relation est valable avec 3 autres taux de polarisation relativement à 3 types de vibration définissant sur la sphère de Poincaré un trièdre trirectangle.

Remarquons enfin que nous donnons un signe à un taux de polarisation relative. Pour rétablir le signe + il suffit de remplacer l'ellipse de référence choisie par l'ellipse définie par le point diamétralement opposé de la sphère. C'est, on le sait, une ellipse semblable, parcourue en sens inverse et croisée γ (c'est-à-dire ayant tourné d'un angle droit par rapport à la première).

12. Le tenseur f^{ij} . — Les quantités μ , ν , γ , σ ne sont définies qu'après un choix d'axes rectangulaires Ox, Oy. Choisissons d'autres axes rectangulaires Ox'_1 , Ox'_2 , les premiers étant

maintenant désignés par Ox_1, Ox_2 et cherchons à exprimer les nouvelles quantités $\mu', \nu', \gamma', \sigma'$ en fonction des anciennes μ, ν, γ, σ .

Désignons par α_j^i les cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens, l'indice supérieur i étant relatif aux nouveaux axes, et l'indice inférieur j étant relatif aux anciens. Les formules du paragraphe 6 nous donnent la solution du problème en faisant :

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1^1 & a_2 &= \alpha_1^2 & a_3 &= \alpha_2^1 & a_4 &= \alpha_2^2 \\ \delta_1 &= \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$(I) \quad \begin{cases} \mu' = (\alpha_1^1)^2 \mu + (\alpha_2^1)^2 \nu + 2\alpha_1^1 \alpha_2^1 \gamma \\ \nu' = (\alpha_1^2)^2 \mu + (\alpha_2^2)^2 \nu + 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 \gamma \\ \gamma' = (\alpha_1^1 \alpha_1^2) \mu + \alpha_1^1 \alpha_2^2 \nu + (\alpha_1^2 \alpha_2^1 + \alpha_1^1 \alpha_2^2) \gamma \\ \sigma' = (\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1) \sigma = \sigma \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que μ, ν, γ se transforment comme les 3 composantes indépendantes d'un tenseur symétrique du second ordre à 2 dimensions :

$$\begin{vmatrix} \mu & \gamma \\ \gamma & \nu \end{vmatrix}$$

et σ est invariable comme les composantes indépendantes du tenseur symétrique gauche :

$$\begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{vmatrix}$$

Par addition nous obtenons le tenseur :

$$\begin{vmatrix} \mu & \gamma + \sigma \\ \gamma - \sigma & \nu \end{vmatrix}$$

que nous pouvons désigner par f^{ij}

$$\begin{vmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{vmatrix}$$

On a ainsi :

$$(2) \quad f'^{ij} = \alpha_s^i \alpha_t^j f^{st}.$$

On voit que l'invariant $f^{ii} = \mu + \nu$ représente l'intensité du faisceau.

On peut montrer directement la nature tensorielle des quantités f^{ij} .

Si l'une des vibrations élémentaires est représentée par :

$$x = p \cos (\omega t + \alpha) \quad y = q \cos (\omega t + \beta)$$

nous poserons :

$$\begin{aligned} c^1 &= p \cos \alpha & c^2 &= q \cos \beta \\ s^1 &= p \sin \alpha & s^2 &= q \sin \beta. \end{aligned}$$

Les quantités c^1 , c^2 et s^1 , s^2 sont évidemment des vecteurs, ils représentent la position aux instants 0 et $-\frac{\pi}{2\omega}$ du mobile en mouvement vibratoire. Il en résulte que chacun des ensembles de produits :

$$c^i c^j, \quad s^i s^j, \quad c^i s^j, \quad s^i c^j$$

est un tenseur du second ordre, de même que les combinaisons particulières :

$$\begin{aligned} U^{ij} &= c^i c^j + s^i s^j \\ V^{ij} &= c^i s^j + s^i c^j. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} U^{11} &= p^2 & U^{12} &= pq \cos (\beta - \alpha) \\ U^{21} &= pq \cos (\beta - \alpha) & U^{22} &= q^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} V^{11} &= 0 & V^{12} &= pq \sin (\beta - \alpha) \\ V^{21} &= -pq \sin (\beta - \alpha) & V^{22} &= 0. \end{aligned}$$

En prenant les moyennes relatives à l'ensemble des vibrations élémentaires, on voit bien que les tableaux :

$$\begin{vmatrix} \mu & \gamma \\ \gamma & \nu \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{vmatrix}$$

sont bien des tenseurs de second ordre et que les quantités f^{ij} forment bien les composantes d'un tenseur du second ordre.

On voit d'ailleurs ainsi que les formules de chargement d'axes sont valables avec des axes obliques et que les composantes considérées sont des composantes contravariantes puisque les quantités c^i et s^i sont évidemment contravariantes.

13. Polarisation des divers faisceaux émis par une source.

— Nous allons maintenant étudier la polarisation et l'intensité des faisceaux émis dans toutes les directions par une source. Son émission pourra ou non être provoquée par un rayonnement extérieur. Nous ferons l'hypothèse suivante : à chaque instant la source vibre suivant une ellipse dans l'espace ; dans une direction quelconque la radiation émise vibre suivant une ellipse projection sur un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'ellipse de vibration de la source. Si on partage l'unité de temps en un nombre N assez grand d'intervalles égaux, pendant chacun des intervalles, le mouvement elliptique de la source peut être considéré comme stationnaire, mais il se modifie d'un intervalle à l'autre.

Si Ox_1, Ox_2, Ox_3 sont 3 axes rectangulaires, le mouvement de la source dans l'intervalle i sera représenté par :

$$(1) \quad \begin{cases} (x_1)_i = p_i \cos(\omega t - \varphi_i) \\ (x_2)_i = q_i \cos(\omega t - \psi_i) \\ (x_3)_i = r_i \cos(\omega t - \chi_i) \end{cases}$$

Choisissons 2 axes rectangulaires OX, OY perpendiculaires à la direction de propagation du faisceau étudié. Ils pourront être définis par leurs cosinus directeurs $a, b, c; a', b', c'$.

■

Pendant l'intervalle i le mouvement elliptique propagé sera proportionnel à :

$$\begin{aligned} X_i &= ax_{1i} + bx_{2i} + cx_{3i} \\ Y_i &= a'x_{1i} + b'x_{2i} + c'x_{3i} \end{aligned}$$

Les quantités caractéristiques de cette vibration sont alors :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \mu_i &= \frac{1}{N} \left\{ a^2 p_i^2 + b^2 q_i^2 + c^2 r_i^2 + 2ab p_i q_i \cos(\psi_i - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. + 2ac p_i r_i \cos(\varphi_i - \chi_i) + 2bc q_i r_i \cos(\chi_i - \psi_i) \right\} \\ \nu_i &= \frac{1}{N} \left\{ a'^2 p_i^2 + b'^2 q_i^2 + c'^2 r_i^2 + 2a'b' p_i q_i \cos(\psi_i - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. + 2a'c' p_i r_i \cos(\varphi_i - \chi_i) + 2b'c' q_i r_i \cos(\chi_i - \psi_i) \right\} \\ \gamma_i &= \frac{1}{N} \left\{ aa' p_i^2 + bb' q_i^2 + cc' r_i^2 \right. \\ &\quad \left. + (ab' + ba') p_i q_i \cos(\psi_i - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. + (ac' + ca') p_i r_i \cos(\varphi_i - \chi_i) \right. \\ &\quad \left. + (bc' + cb') p_i r_i \cos(\chi_i - \psi_i) \right\} \\ \sigma_i &= \frac{1}{N} \left\{ (ab' - ba') p_i q_i \sin(\psi_i - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. + (ac' - ca') p_i r_i \sin(\varphi_i - \chi_i) \right. \\ &\quad \left. + (bc' - cb') q_i r_i \sin(\chi_i - \psi_i) \right\} \end{aligned} \right.$$

Posons alors :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{N} \sum_1^N p_i^2 & L_2 &= \frac{1}{N} \sum_1^N q_i^2 & L_3 &= \frac{1}{N} \sum_1^N r_i^2 \\ C_1 &= \frac{1}{N} \sum_1^N q_i r_i \cos(\chi_i - \psi_i) & C_2 &= \frac{1}{N} \sum_1^N r_i p_i \cos(\varphi_i - \chi_i) \\ & & C_3 &= \frac{1}{N} \sum_1^N p_i q_i \cos(\psi_i - \varphi_i) \\ S_1 &= \frac{1}{N} \sum_1^N q_i r_i \sin(\chi_i - \psi_i) & S_2 &= \frac{1}{N} \sum_1^N r_i p_i \sin(\varphi_i - \chi_i) \\ & & S_3 &= \frac{1}{N} \sum_1^N p_i q_i \sin(\psi_i - \varphi_i) \end{aligned} \right.$$

Ces 9 quantités sont les caractéristiques de l'émission de la source. On obtient :

$$(4) \quad \begin{cases} \mu = a^2 L_1 + b^2 L_2 + c^2 L_3 + 2bc C_1 + 2ca C_2 + 2ab C_3 \\ \nu = a'^2 L_1 + b'^2 L_2 + c'^2 L_3 + 2b'c' C_1 + 2c'a' C_2 + 2a'b' C_3 \\ \gamma = aa' L_1 + bb' L_2 + cc' L_3 + (bc' + cb') C_1 \\ \quad \quad \quad + (ac' + ca') C_2 + (ab' + ba') C_3 \\ \sigma = (bc' - cb') S_1 + (ca' - ac') S_2 + (ab' - ba') S_3. \end{cases}$$

14. Détermination expérimentale des quantités L, C, S. —

On voit que la connaissance des seules quantités L, C, S permet de prévoir l'intensité et la polarisation des faisceaux émis dans toutes les directions. Inversement, l'étude expérimentale d'un nombre fini de faisceaux permet la détermination des 9 caractéristiques et par suite permet de prévoir les résultats dans les autres directions.

Il serait intéressant de n'avoir à étudier que les faisceaux d'un même plan Ox_1, Ox_2 par exemple. L'étude du faisceau dirigé suivant Ox_1 nous donne L_2, L_3, C_1 et S_1 . Celle du faisceau suivant Ox_2 donne L_1, C_2, S_2 et aussi L_3 . Un faisceau à 45° de ceux-ci permet le calcul de C_3 . Mais S_3 ne peut s'obtenir que par l'étude d'un faisceau sortant de ce plan.

On vérifiera aisément que pour un faisceau suivant Ox_1 , la vibration étant étudiée par rapport à Ox_2, Ox_3 .

$$\mu = L_2 \quad \nu = L_3 \quad \gamma = C_1 \quad \sigma = S_1$$

Faisceau Ox_2 (étude suivant Ox_3, Ox_1) :

$$\mu = L_3 \quad \nu = L_1 \quad \gamma = C_2 \quad \sigma = S_2$$

Faisceau Ox_3 (étude suivant Ox_1, Ox_2) :

$$\mu = L_1 \quad \nu = L_2 \quad \gamma = C_3 \quad \sigma = S_3$$

15. Introduction du tenseur E^{ij} . — Changeons les axes de référence. Et soient Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 , les nouveaux axes, les cosin-

nus directeurs de ces axes par rapport aux anciens étant désignés par α_j^i où l'indice supérieur i se rapporte aux nouveaux axes et l'indice inférieur j aux anciens. La remarque précédente nous permet d'établir l'expression de nouvelles quantités L', C', S' en fonction des anciennes :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} L'_1 &= (\alpha_1^1)^2 L_1 + (\alpha_1^2)^2 L_2 + (\alpha_1^3)^2 L_3 + 2\alpha_2^1 \alpha_3^1 C_1 \\ &\quad + 2\alpha_3^1 \alpha_1^2 C_2 + 2\alpha_1^1 \alpha_2^3 C_3 \\ L'_2 &= (\alpha_2^1)^2 L_1 + (\alpha_2^2)^2 L_2 + (\alpha_2^3)^2 L_3 + 2\alpha_1^2 \alpha_3^2 C_1 \\ &\quad + 2\alpha_3^2 \alpha_1^2 C_2 + 2\alpha_1^2 \alpha_2^3 C_3 \\ L'_3 &= (\alpha_3^1)^2 L_1 + (\alpha_3^2)^2 L_2 + (\alpha_3^3)^2 L_3 + 2\alpha_1^3 \alpha_3^3 C_1 \\ &\quad + 2\alpha_3^3 \alpha_1^3 C_2 + 2\alpha_1^3 \alpha_2^3 C_3 \\ C'_1 &= \alpha_1^2 \alpha_1^3 L_1 + \alpha_2^1 \alpha_1^3 L_2 + \alpha_3^2 \alpha_1^3 L_3 + (\alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_2^2) C_1 \\ &\quad + (\alpha_3^2 \alpha_1^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) C_2 + (\alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) C_3 \\ C'_2 &= \alpha_1^3 \alpha_1^1 L_1 + \alpha_2^3 \alpha_1^1 L_2 + \alpha_3^3 \alpha_1^1 L_3 + (\alpha_2^3 \alpha_3^3 + \alpha_3^3 \alpha_2^3) C_1 \\ &\quad + (\alpha_3^3 \alpha_1^3 + \alpha_1^3 \alpha_3^3) C_2 + (\alpha_1^3 \alpha_2^3 + \alpha_2^3 \alpha_1^3) C_3 \\ C'_3 &= \alpha_1^1 \alpha_1^2 L_1 + \alpha_2^1 \alpha_1^2 L_2 + \alpha_3^1 \alpha_1^2 L_3 + (\alpha_2^1 \alpha_3^1 + \alpha_3^1 \alpha_2^1) C_1 \\ &\quad + (\alpha_3^1 \alpha_1^1 + \alpha_1^1 \alpha_3^1) C_2 + (\alpha_1^1 \alpha_2^1 + \alpha_2^1 \alpha_1^1) C_3 \\ S'_1 &= (\alpha_1^2 \alpha_3^2 - \alpha_3^2 \alpha_1^2) S_1 + (\alpha_2^2 \alpha_3^2 - \alpha_3^2 \alpha_2^2) S_2 + (\alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha_2^2 \alpha_1^2) S_3 \\ S'_2 &= (\alpha_1^3 \alpha_3^1 - \alpha_3^1 \alpha_1^3) S_1 + (\alpha_2^3 \alpha_3^1 - \alpha_3^1 \alpha_2^3) S_2 + (\alpha_1^3 \alpha_2^1 - \alpha_2^1 \alpha_1^3) S_3 \\ S'_3 &= (\alpha_1^1 \alpha_3^2 - \alpha_3^2 \alpha_1^1) S_1 + (\alpha_2^1 \alpha_3^2 - \alpha_3^2 \alpha_2^1) S_2 + (\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_2^2 \alpha_1^1) S_3 \end{aligned} \right.$$

On voit ainsi que les 6 coefficients $L_1, L_2, L_3, C_1, C_2, C_3$, se transforment entre eux comme les 6 composantes indépendantes d'un tenseur symétrique du 2^e ordre à 3 dimensions, alors que les 3 autres comme les trois composantes indépendantes d'un tenseur symétrique gauche.

Ces 2 tenseurs s'écrivent :

$$\begin{vmatrix} L_1 & C_3 & C_2 \\ C_3 & L_2 & C_1 \\ C_2 & C_1 & L_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ -S_3 & 0 & S_1 \\ S_2 & -S_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Par addition nous obtenons le tenseur E^{ij} dont les composantes sont données par le tableau :

$$\begin{vmatrix} L_1 & C_3 + S_3 & C_2 - S_2 \\ C_3 - S_3 & L_2 & C_1 + S_1 \\ C_1 + S_2 & C_1 - S_1 & L_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} E^{11} & E^{12} & E^{13} \\ E^{21} & E^{22} & E^{23} \\ E^{31} & E^{32} & E^{33} \end{vmatrix}$$

ou bien par les formules :

$$(2) \quad \begin{cases} E^{ii} = L_i \\ E^{ij} = C_k + S_k \\ E^{ji} = C_k - S_k \end{cases}$$

où i et j sont deux nombres consécutifs de la suite 1, 2, 3, 1 et k le nombre différent de i et de j .

Le tenseur E^{ij} se transforme suivant la formule :

$$(3) \quad E'^{ij} = \alpha_s^i \alpha_t^j E^{st}.$$

Il caractérise complètement l'émission considérée.

Considérons la quantité $J = E^{ii} = L_1 + L_2 + L_3$, c'est un invariant. Il représente l'intensité totale du rayonnement émis.

De même qu'au paragraphe 12 et par la même méthode nous pourrions montrer directement que les quantités E^{ij} sont des composantes tensorielles et que ces composantes sont d'ailleurs contravariantes. Les formules de transformation données sont donc valables en axes obliques.

16. L'émission est provoquée par un rayonnement extérieur. Cas d'un seul faisceau excitateur. — Nous allons nous occuper maintenant du cas où la source émet sous l'influence d'un rayonnement extérieur. Nous supposerons d'abord que ce rayonnement est formé de faisceaux parallèles, ou, puisque la source est considérée comme très petite, d'un seul faisceau.

Les quantités L, C, S qui caractérisent alors l'émission de la source dépendent de la nature de la lumière incidente et *a priori* de toutes les particularités de ses vibrations. Mais si nous postulons qu'il est impossible de tirer des résultats expérimentaux autre chose que les moyennes μ, ν, γ, σ comme quantités caractéristiques de l'état de polarisation d'un faisceau lumineux, les quantités L, C, S caractérisant l'émission, seront des fonctions des seules quantités μ, ν, γ, σ caractérisant la lumière incidente. Faisons maintenant agir simultanément deux faisceaux incidents superposés, leurs vibrations ne présentant aucune cohérence. Les faisceaux émis dans une direction quelconque seront la superposition des faisceaux ne présentant aucune cohérence qui auraient été émis dans cette direction par l'un et l'autre faisceau excitateur incident. Nous savons que dans ce cas les μ, ν, γ, σ s'ajoutent entre eux ainsi que les L, C, S comme il est facile de s'en assurer en les considérant comme les μ, ν, γ, σ des faisceaux émis suivant les axes. Cette propriété exige alors comme l'on sait que les formules donnant chacune des 9 quantités L, C, S soient linéaires et homogènes par rapport aux 4 variables μ, ν, γ, σ . Il y a donc, dans le cas général $9 \times 4 = 36$ constantes caractéristiques du problème. Les symétries permettent d'ailleurs de réduire souvent ce nombre d'une façon très sensible. Nous ne traiterons cette réduction que dans le problème plus général ci-dessous.

17. Le rayonnement excitateur est quelconque. Introduction des quantités $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$. — Jusqu'à présent la source étudiée n'était excitée que par un seul faisceau de direction fixe, l'intensité et la polarisation étant les seules variables. Nous allons chercher maintenant en outre l'influence d'une modification de la direction du faisceau excitateur. Cette modification de la direction présente en particulier de l'intérêt si la source est *a priori* anisotrope, c'est-à-dire anisotrope antérieurement à son excitation. C'est le cas s'il y a un champ

magnétique ou électrique ou les deux. Nous traiterons en même temps le cas où il y a plusieurs faisceaux excitateurs de directions diverses, par exemple un faisceau conique convergent vers la source. Nous postulons les faits suivants :

1° Une vibration linéaire de la lumière excitatrice produit exactement le même effet quelle que soit la direction, perpendiculaire à la droite de vibration, de la propagation du faisceau incident. C'est essentiellement le vecteur électrique qui caractérise la vibration, le vecteur magnétique ne jouant aucun rôle. Dans le cas où la source est *à priori* isotrope, l'émission est symétrique par rapport à la direction de vibration de la lumière excitatrice.

Cette hypothèse est confirmée dans l'étude de la résonance du mercure (Wood et Ellett) ⁽¹⁾ et a été introduite par divers auteurs (F. Perrin ⁽²⁾ fluorescence des solutions).

2° Deux vibrations linéaires provenant d'un seul ou de plusieurs faisceaux incidents de directions diverses se composent toujours à un instant donné en une vibration elliptique de plan invariable.

L'émission ne dépendra que des μ , ν , γ , σ portant sur cet ensemble de mouvements elliptiques et la direction perpendiculaire au plan de vibration.

3° Dans le cas général la vibration incidente est un mouvement elliptique dans l'espace, la forme, la grandeur et la position de l'ellipse variant au cours du temps. Nous pourrions définir des quantités moyennes $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ de la même façon que nous avons défini les 9 quantités moyennes caractéristiques de l'émission. Ces 9 quantités moyennes $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ caractérisent à elles seules l'excitation.

18. Les coefficients a_i^j . — Les 9 quantités L, C, S dépendront donc uniquement des 9 quantités $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ et pour des

(1) WOOD et ELLETT, *Physical Review*, 24, p. 234 (1924).

(2) F. PERRIN, *Journal de Physique*, 7, p. 390 (1926).

raisons d'additivité invoquées plus haut, ces relations ne pourront être que linéaires et homogènes. Il s'introduit donc dans ce problème $9 \times 9 = 81$ constantes caractéristiques.

$$\begin{aligned}
 (I) \quad \left\{ \begin{aligned}
 L_1 &= a_1^1 \mathcal{L}_1 + a_1^2 \mathcal{L}_2 + a_1^3 \mathcal{L}_3 + a_1^4 \mathcal{C}_1 + a_1^5 \mathcal{C}_2 + a_1^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_1^7 \mathcal{S}_1 + a_1^8 \mathcal{S}_2 + a_1^9 \mathcal{S}_3 \\
 L_2 &= a_2^1 \mathcal{L}_1 + a_2^2 \mathcal{L}_2 + a_2^3 \mathcal{L}_3 + a_2^4 \mathcal{C}_1 + a_2^5 \mathcal{C}_2 + a_2^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_2^7 \mathcal{S}_1 + a_2^8 \mathcal{S}_2 + a_2^9 \mathcal{S}_3 \\
 L_3 &= a_3^1 \mathcal{L}_1 + a_3^2 \mathcal{L}_2 + a_3^3 \mathcal{L}_3 + a_3^4 \mathcal{C}_1 + a_3^5 \mathcal{C}_2 + a_3^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_3^7 \mathcal{S}_1 + a_3^8 \mathcal{S}_2 + a_3^9 \mathcal{S}_3 \\
 C_1 &= a_4^1 \mathcal{L}_1 + a_4^2 \mathcal{L}_2 + a_4^3 \mathcal{L}_3 + a_4^4 \mathcal{C}_1 + a_4^5 \mathcal{C}_2 + a_4^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_4^7 \mathcal{S}_1 + a_4^8 \mathcal{S}_2 + a_4^9 \mathcal{S}_3 \\
 C_2 &= a_5^1 \mathcal{L}_1 + a_5^2 \mathcal{L}_2 + a_5^3 \mathcal{L}_3 + a_5^4 \mathcal{C}_1 + a_5^5 \mathcal{C}_2 + a_5^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_5^7 \mathcal{S}_1 + a_5^8 \mathcal{S}_2 + a_5^9 \mathcal{S}_3 \\
 C_3 &= a_6^1 \mathcal{L}_1 + a_6^2 \mathcal{L}_2 + a_6^3 \mathcal{L}_3 + a_6^4 \mathcal{C}_1 + a_6^5 \mathcal{C}_2 + a_6^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_6^7 \mathcal{S}_1 + a_6^8 \mathcal{S}_2 + a_6^9 \mathcal{S}_3 \\
 S_1 &= a_7^1 \mathcal{L}_1 + a_7^2 \mathcal{L}_2 + a_7^3 \mathcal{L}_3 + a_7^4 \mathcal{C}_1 + a_7^5 \mathcal{C}_2 + a_7^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_7^7 \mathcal{S}_1 + a_7^8 \mathcal{S}_2 + a_7^9 \mathcal{S}_3 \\
 S_2 &= a_8^1 \mathcal{L}_1 + a_8^2 \mathcal{L}_2 + a_8^3 \mathcal{L}_3 + a_8^4 \mathcal{C}_1 + a_8^5 \mathcal{C}_2 + a_8^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_8^7 \mathcal{S}_1 + a_8^8 \mathcal{S}_2 + a_8^9 \mathcal{S}_3 \\
 S_3 &= a_9^1 \mathcal{L}_1 + a_9^2 \mathcal{L}_2 + a_9^3 \mathcal{L}_3 + a_9^4 \mathcal{C}_1 + a_9^5 \mathcal{C}_2 + a_9^6 \mathcal{C}_3 \\
 &\quad + a_9^7 \mathcal{S}_1 + a_9^8 \mathcal{S}_2 + a_9^9 \mathcal{S}_3
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

A cause des symétries de la source antérieurement à l'excitation, ces 81 constantes peuvent souvent se réduire à un nombre bien inférieur de constantes indépendantes.

19. Symétrie du champ magnétique. — Considérons le cas d'un champ magnétique. Supposons-le dirigé suivant Ox_3 . Prenons de nouveaux axes Ox'_1 , Ox'_2 , Ox_3 ayant tourné de l'angle θ par rapport aux premiers autour de Ox_3 . Il faut que, l'excitation étant représentée par les mêmes quantités, l'émis-

sion soit aussi représentée par les mêmes quantités. On peut dire également qu'il faut que les a_i^j ne soient pas modifiés par un tel changement d'axes.

Montrons qu'il suffit qu'il en soit ainsi pour une rotation infiniment petite ($d\theta$) aux quantités du second ordre près. Considérons en effet les 2 rotations voisines (θ) et ($\theta + d\theta$). Les nouveaux a_i^j pour une rotation (θ) étant des fonctions linéaires et homogènes des anciens a_i^j les coefficients de ces formes linéaires ne dépendent que de θ . Les a_i^j après la rotation ($\theta + d\theta$) s'expriment en fonction des a_i^j après la rotation ($d\theta$) rigoureusement de la même façon que les a_i^j après la rotation (θ) en fonction des a_i^j de la position initiale. Donc si les a_i^j après la rotation ($d\theta$) ne diffèrent de ceux de la position initiale que de quantités du second ordre, les a_i^j après la rotation ($\theta + d\theta$) ne différeront de ceux après la rotation (θ) que de quantités du second ordre. La dérivée de chacun des a_i^j par rapport à θ est donc toujours nulle, et ces quantités sont invariables dans la transformation considérée.

Effectuons donc la rotation $d\theta$ des axes autour de Ox_3 les quantités L , C , S subissent les accroissements :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} dL_1 = -2C_3 d\theta \\ dL_2 = +2C_3 d\theta \\ dL_3 = 0 \\ dC_1 = C_2 d\theta \\ dC_2 = -C_1 d\theta \\ dC_3 = (L_1 - L_2) d\theta \\ dS_1 = -S_2 d\theta \\ dS_2 = +S_1 d\theta \\ dS_3 = 0 \end{array} \right.$$

Il est nécessaire que les a_i^j soient tels que les quantités $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ subissent alors des accroissements analogues où L , C , S sont remplacés par $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$.

On simplifie les calculs en écrivant d'abord la condition d'invariance des a_i^j pour une rotation de π . Les L , C , S et $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ sont alors transformés suivant les formules :

$$(2) \quad \begin{cases} L'_1 = L_1 & L'_2 = L_2 & L'_3 = L_3 \\ C'_1 = -C_1 & C'_2 = -C_2 & C'_3 = C_3 \\ S'_1 = -S_1 & S'_2 = -S_2 & S'_3 = S_3 \end{cases}$$

On obtient les 40 équations suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} a_1^4 = a_1^5 = a_1^7 = a_1^8 = 0 \\ a_2^4 = a_2^5 = a_2^7 = a_2^8 = 0 \\ a_3^4 = a_3^5 = a_3^7 = a_3^8 = 0 \\ a_4^1 = a_4^2 = a_4^3 = a_4^6 = a_4^9 = 0 \\ a_5^1 = a_5^2 = a_5^3 = a_5^6 = a_5^9 = 0 \\ a_6^4 = a_6^5 = a_6^7 = a_6^8 = 0 \\ a_7^1 = a_7^2 = a_7^3 = a_7^6 = a_7^9 = 0 \\ a_8^1 = a_8^2 = a_8^3 = a_8^6 = a_8^9 = 0 \\ a_9^4 = a_9^5 = a_9^7 = a_9^8 = 0 \end{cases}$$

En appliquant enfin la condition d'invariance pour une rotation ($d\theta$), il ne reste plus que 19 coefficients indépendants. Les formules sont les suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} L_1 = a_1^4 \mathcal{L}_1 + (a_1^4 - a_6^6) \mathcal{L}_2 + a_1^3 \mathcal{L}_3 + a_1^6 \mathcal{C}_3 + a_1^9 \mathcal{S}_3 \\ L_2 = (a_1^4 - a_6^6) \mathcal{L}_1 + a_1^4 \mathcal{L}_2 + a_1^3 \mathcal{L}_3 - a_1^6 \mathcal{C}_3 + a_1^9 \mathcal{S}_3 \\ L_3 = a_1^4 (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + a_1^3 \mathcal{L}_3 + a_1^9 \mathcal{S}_3 \\ C_1 = a_4^4 \mathcal{C}_1 + a_4^5 \mathcal{C}_2 + a_4^7 \mathcal{S}_1 + a_4^8 \mathcal{S}_2 \\ C_2 = -a_4^5 \mathcal{C}_1 + a_4^4 \mathcal{C}_2 + a_4^8 \mathcal{S}_1 - a_4^7 \mathcal{S}_2 \\ C_3 = \frac{1}{2} a_1^6 (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) + a_6^6 \mathcal{C}_3 \\ S_1 = a_7^4 \mathcal{C}_1 + a_7^5 \mathcal{C}_2 + a_7^7 \mathcal{S}_1 + a_7^8 \mathcal{S}_2 \\ S_2 = a_7^5 \mathcal{C}_1 - a_7^4 \mathcal{C}_2 - a_7^8 \mathcal{S}_1 + a_7^7 \mathcal{S}_2 \\ S_3 = a_9^4 (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + a_9^3 \mathcal{L}_3 + a_9^9 \mathcal{S}_3 \end{cases}$$

Remarquons que la symétrie par rapport au plan Ox_1, Ox_2 qui fait partie de la symétrie du champ magnétique est simultanément vérifiée du fait même de la symétrie centrale de l'ensemble des quantités considérées.

20. Symétrie du champ électrique. — Considérons le cas où la symétrie est celle d'un champ électrique. Supposons-le dirigé suivant Ox_3 . A la condition de symétrie du paragraphe précédent, s'ajoute la condition suivante. Un plan passant par l'axe d'un tel champ étant pour lui plan de symétrie, il faut que des excitations symétriques par rapport à Ox_1, Ox_3 provoquent des émissions symétriques par rapport à ce même plan. Il faut donc que C_2, C_3, S_2, S_3 changent de signe avec $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ les autres quantités demeurant inaltérées. On en conclut que :

$$a_1^6 = a_1^9 = 0$$

$$a_3^9 = 0 \quad a_4^5 = a_4^8 = 0 \quad a_7^5 = a_7^8 = 0 \quad a_9^1 = a_9^3 = 0.$$

Les formules deviennent :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = a_1^4 \mathcal{L}_1 + (a_1^4 - a_6^6) \mathcal{L}_2 + a_1^3 \mathcal{L}_3 \\ L_2 = (a_1^4 - a_6^6) \mathcal{L}_1 + a_1^4 \mathcal{L}_2 + a_1^3 \mathcal{L}_3 \\ L_3 = a_3^4 (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) + a_3^3 \mathcal{L}_3 \\ C_1 = a_4^4 \mathcal{C}_1 + a_4^7 \mathcal{S}_1 \\ C_2 = a_4^4 \mathcal{C}_2 - a_4^7 \mathcal{S}_2 \\ C_3 = a_6^6 \mathcal{C}_3 \\ S_1 = a_4^4 \mathcal{C}_1 + a_7^7 \mathcal{S}_1 \\ S_2 = -a_7^4 \mathcal{C}_2 + a_7^7 \mathcal{S}_2 \\ S_3 = a_9^9 \mathcal{S}_3 \end{array} \right.$$

Elles ne contiennent plus que 10 constantes. Les expériences de Hanle ⁽¹⁾ sur le mercure montrent en particulier que $a_7^4 \neq 0$.

⁽¹⁾ HANLE. *Zeitschrift für Physik*, 35, p. 346 (1926).

21. Isotropie. — Considérons le cas où rien ne vient troubler l'isotropie du milieu source antérieurement à l'excitation. Les axes Ox_1, Ox_2, Ox_3 doivent pouvoir jouer le même rôle. Les formules deviennent :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = a_1^4 \mathcal{L}_1 + (a_1^4 - a_6^6) (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) \\ L_2 = a_1^4 \mathcal{L}_2 + (a_1^4 - a_6^6) (\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_1) \\ L_3 = a_1^4 \mathcal{L}_3 + (a_1^4 - a_6^6) (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \\ C_1 = a_6^6 \mathcal{C}_1 \\ C_2 = a_6^6 \mathcal{C}_2 \\ C_3 = a_6^6 \mathcal{C}_3 \\ S_1 = a_9^9 \mathcal{S}_1 \\ S_2 = a_9^9 \mathcal{S}_2 \\ S_3 = a_9^9 \mathcal{S}_3 \end{array} \right.$$

Ainsi il ne s'introduit plus que trois constantes.

22. Le tenseur A_{ij}^{st} . — Par un changement d'axes de coordonnées les a_j^i ne se transforment pas comme les composantes d'un tenseur. Pour en obtenir un, nous n'avons qu'à considérer qu'aux quantités $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ caractéristiques de l'excitation on peut faire correspondre un tenseur $\mathcal{E}^{ij}$ de la même façon qu'on a fait correspondre E^{ij} aux quantités L, C, S . Chaque composante de E^{ij} est une forme linéaire des quantités $\mathcal{E}^{ij}$ et les coefficients de ces formes constituent un tenseur.

$$(1) \quad E^{st} = A_{ij}^{st} \mathcal{E}^{ij}.$$

Avec de nouveaux axes ayant par rapport aux anciens des cosinus directeurs α_j^i (i , nouveaux axes ; j , anciens) les quantités considérées deviennent :

$$E'^{kl} = \alpha_i^k \alpha_j^l E^{ij}$$

$$\mathcal{E}'^{kl} = \alpha_i^k \alpha_j^l \mathcal{E}^{ij}$$

$$(2) \quad A'^{st}_{kl} = \alpha_u^s \alpha_v^t \alpha_i^k \alpha_j^l A^{uv}_{ij}$$

Il est évident que les a sont des fonctions linéaires et homogènes des A et inversement. Voici les formules qui permettent de faire aisément la transformation.

$$A^{ss}_{ii} = a^i_s$$

$$A^{ss}_{ij} + A^{ss}_{ji} = a^{k+3}_s$$

$$A^{ss}_{ij} - A^{ss}_{ji} = a^{k+6}_s$$

$$A^{st}_{ii} = a^i_{u+3} + a^i_{u+6}$$

$$A^{ts}_{ii} = a^i_{u+3} - a^i_{u+6}$$

(3)

$$A^{st}_{ij} + A^{st}_{ji} = a^{k+3}_{u+3} + a^{k+3}_{u+6}$$

$$A^{ts}_{ij} + A^{ts}_{ji} = a^{k+3}_{u+3} - a^{k+3}_{u+6}$$

$$A^{st}_{ij} - A^{st}_{ji} = a^{k+6}_{u+3} + a^{k+6}_{u+6}$$

$$A^{ts}_{ij} - A^{ts}_{ji} = a^{k+6}_{u+3} - a^{k+6}_{u+6}$$

Dans ces formules les lettres doublées n'étant pas muettes, il n'y a pas de sommation à effectuer. Les groupes (st) et (ij) doivent être pris dans l'ordre (1231) , u et k étant respectivement le troisième nombre non employé.

23. Les 3 invariants du tenseur A^{st}_{ij} . — Par une double contraction des 4 indices nous obtenons les 3 invariants distincts suivants :

$$(1) \quad P = A^{ss}_{ii} \quad Q = A^{si}_{si} \quad R = A^{is}_{si}$$

Exprimons-les en fonction des a .

Grâce aux formules précédentes nous obtenons :

$$(2) \quad \begin{aligned} P &= A^{ss}_{ii} = \sum_i a^i_s \\ Q &= A^{si}_{si} = \sum_i a^i_i + \sum_k (a^{k+3}_k + a^{k+6}_k) \\ R &= A^{is}_{si} = \sum_i a^i_i + \sum_k (a^{k+3}_k - a^{k+6}_k) \end{aligned}$$

Nous allons obtenir une interprétation physique de ces quantités.

24. Distribution isotrope d'éléments anisotropes. — Chaque élément anisotrope sera défini par le même tenseur A_{ij}^{st} , mais rapporté à des axes de coordonnées distribués d'une manière isotrope autour de leur origine. Pour avoir le tenseur caractéristique du milieu résultant, il nous faudra faire la somme des tenseurs A_{ij}^{st} rapportés à un même système d'axes, c'est-à-dire la somme des quantités :

$$A_{ij}^{'st} = \alpha_u^s \alpha_v^t \alpha_k^i \alpha_e^j A_{kl}^{uv}$$

Si A_{ij}^{st} ne se rapporte pas à un élément unique, mais à l'ensemble des éléments rendus parallèles, il nous faudra faire non pas la somme, mais la moyenne de chacune des quantités :

$$\alpha_s^u \alpha_v^t \alpha_k^i \alpha_e^j$$

Leur nombre est considérable : $3^8 = 3761$.

Fort heureusement, beaucoup d'entre eux sont nuls et les autres se réduisent à un nombre restreint de types. Quoique les calculs directs ne présentent aucune difficulté, nous utiliserons une méthode plus rapide.

Remarquons d'abord que le milieu résultant étant isotrope nous n'avons à calculer que les 3 coefficients caractéristiques a_1^4 , a_6^6 , a_9^9 . Or ces coefficients peuvent s'exprimer facilement en fonction des invariants PQR du tenseur caractéristique du milieu résultant. En effet les formules données au paragraphe précédent nous donnent :

$$(1) \quad \begin{cases} P = 9a_1^4 - 6a_6^6 \\ Q = 3a_1^4 + 3a_6^6 + 3a_9^9 \\ R = 3a_1^4 + 3a_6^6 - 3a_9^9 \end{cases}$$

d'où :

$$(2) \quad \begin{cases} a_1^1 = \frac{1}{15} (P + Q + R) \\ a_6^6 = -\frac{1}{15} P + \frac{1}{10} (Q + R) \\ a_9^9 = \frac{1}{6} (Q - R) \end{cases}$$

mais les quantités PQR du milieu résultant sont les moyennes des PQR de chaque élément anisotrope. Ces derniers étant invariables, P, Q, R sont les 3 invariants du tenseur caractéristique de chaque élément anisotrope.

25. Application. Oscillateurs linéaires, circulaires, elliptiques. — Dans l'étude de la polarisation des solutions fluorescentes, on a utilisé l'hypothèse d'oscillateurs linéaires distribués isotropement.

L'élément anisotrope peut être caractérisé par

$$a_i^j = 0 \quad \text{sauf} \quad a_1^1 = 1 \\ P = Q = R = 1.$$

Pour le milieu résultant on a :

$$(1) \quad a_1^1 = \frac{1}{5} \quad a_6^6 = \frac{2}{15} \quad a_9^9 = 0.$$

Pour obtenir un oscillateur circulaire de type défini par :

$$a_1^1 = a_1^2 = a_2^1 = a_2^2 = a_9^1 = a_9^2 = 1 \\ a_1^9 = a_2^9 = a_9^9 = 2$$

les autres : $a_i^j = 0.$

On a :

$$P = 4 \quad Q = 4 \quad R = 0.$$

On obtient pour le milieu résultant :

$$(2) \quad a_1^1 = \frac{8}{15} \quad a_6^6 = \frac{2}{15} \quad a_9^9 = \frac{10}{15}.$$

Pour un oscillateur elliptique de type défini par :

$$\begin{aligned} a_1^1 &= 1 & a_1^2 &= (1 - \varepsilon^2) & a_1^3 &= 2\sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ a_2^1 &= (1 - \varepsilon^2) & a_2^2 &= (1 - \varepsilon^2)^2 & a_2^3 &= 2(1 - \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ a_3^1 &= \sqrt{1 - \varepsilon^2} & a_3^2 &= (1 - \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2} & a_3^3 &= 2(1 - \varepsilon^2) \\ P &= 4 - 4\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \\ Q &= 4 - 4\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \\ R &= \varepsilon^4. \end{aligned}$$

On obtient pour le milieu résultant :

$$\begin{aligned} (3) \quad a_1^4 &= \frac{1}{15} [8 - 8\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4] \\ a_6^6 &= \frac{1}{15} [2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4] \\ a_9^9 &= \frac{10}{15} [1 - \varepsilon^2] \end{aligned}$$

26. Mesure expérimentale des coefficients a_1^1 , a_6^6 , a_9^9 dans le cas d'isotropie. — En ce qui concerne la polarisation, c'est plutôt leurs rapports qui présentent de l'intérêt. Nous poserons $\frac{a_6^6}{a_1^1} = b \frac{a_9^9}{a_1^1} = c$. Indiquons comment on peut les déterminer expérimentalement.

Eclairons en lumière parallèle suivant Ox_3 par exemple. Si la lumière est polarisée rectilignement suivant Ox_1 on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= 1 & \mathcal{L}_2 &= 0 & \mathcal{L}_3 &= 0 \\ \mathcal{C} &= \mathcal{S} = 0. \end{aligned}$$

On observe suivant Ox_2 , les axes de référence étant Ox_1, Ox_3 . Le taux de polarisation observé p est donné par :

$$(1) \quad p = \frac{L_1 - L_3}{L_1 + L_3} = \frac{a_6^6}{2a_1^1 - a_6^6} = \frac{b}{2 - b}$$

d'où :

$$(2) \quad b = \frac{2p}{1 + p}$$

(Expériences de Wood, Datta ⁽¹⁾, Keussler ⁽²⁾ sur la vapeur de mercure et de sodium).

On peut également éclairer par de la lumière naturelle.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= 1 & \mathcal{L}_2 &= 1 & \mathcal{L}_3 &= 0 \\ \mathcal{C} &= \mathcal{S} = 0. \end{aligned}$$

On observe de la même façon. La polarisation observée p_0 est donnée par :

$$(3) \quad p_0 = \frac{L_1 - L_3}{L_1 + L_3} = \frac{a_6^6}{4a_1^2 - 3a_6^6} = \frac{b}{4 - 3b}$$

d'où :

$$(4) \quad b = \frac{4p_0}{1 + 3p_0}.$$

(Expériences sur la vapeur de cadmium) ⁽³⁾.

On en déduit :

$$(5) \quad \frac{1}{p_0} = \frac{2}{p} - 1 \quad (\text{Wawilov et Lewschin}) \text{ } ^{(4)}.$$

Pour obtenir $c = \frac{a_9}{a_1}$ il faut éclairer avec une lumière au

moins partiellement elliptique, par exemple circulaire. Il faut observer dans une direction différente du plan de la vibration, par exemple suivant la direction du faisceau excitateur (Expériences de Hanle sur le mercure et le sodium) ⁽⁵⁾.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= 1 & \mathcal{L}_2 &= 1 & \mathcal{L}_3 &= 0 \\ \mathcal{C} &= 0 & \mathcal{S}_1 &= \mathcal{S}_2 = 0 & \mathcal{S}_3 &= 1 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ DATTA, *Zeitschrift für Physik*, 37, p. 625 (1926).

⁽²⁾ KEUSSLER, *Annalen der Physik*, 82, p. 793 (1927).

⁽³⁾ C. R., 186, p. 212, 1928.

⁽⁴⁾ WAWILOW et LEWSCHIN, *Zeitschrift für Physik*, 16, p. 135, (1923).

⁽⁵⁾ HANLE, *Zeitschrift für Physik*, 41, p. 164 (1927).

On observe suivant Ox_3 :

$$(6) \quad p_1 = \frac{S_3}{L_1} = \frac{a_9^3}{2a_1^4 - a_6^6} = \frac{c}{2-b}$$

d'où c dès que l'on connaît b .

On pourrait d'ailleurs avoir b dans les mêmes conditions d'éclairement par une observation suivant Ox_2 par exemple. On aurait :

$$(7) \quad p_0 = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_3} = \frac{b}{4-3b}.$$

Donnons ici quelques exemples. Dans la résonance des raies du type ($1^1S_0 - 2^3P_1$) où j passe à l'émission de la valeur 1 à la valeur 0, on devrait avoir théoriquement :

$$p = 1 \text{ (100 0/0)} \quad p_1 = 1,$$

d'où :

$$b = 1 \quad c = 1.$$

Pour la raie ($1^2S_{\frac{1}{2}} - 2^2P_{\frac{1}{2}}$) où j conserve la valeur $\frac{1}{2}$, raie D, du sodium ou ($2^2P_{\frac{1}{2}} - 2^2S_{\frac{1}{2}}$) raie $\lambda = 3776$ du thallium, on doit avoir :

$$\begin{aligned} p &= 0 & p_1 &= 1 \\ b &= 0 & c &= 2 \end{aligned}$$

Pour la raie ($1^2S_{\frac{1}{2}} - 2^2P_{\frac{3}{2}}$), passage de $j = \frac{3}{2}$ à $j = \frac{1}{2}$, raie D_2 du sodium ou ($2^2P_{\frac{1}{2}} - 3^2D_{\frac{3}{2}}$) raie $\lambda = 2768$ du thallium, on prévoit :

$$\begin{aligned} p &= \frac{6}{10} & p_1 &= 1 \\ b &= \frac{3}{4} & c &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Inversement dans le cas d'un assemblage isotrope de vibreurs elliptiques on a vu que :

$$a_1^4 = \frac{1}{15} [8 - 8\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4]$$

$$a_6^6 = \frac{1}{15} [2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4]$$

d'où :

$$b = \frac{2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4}{8 - 8\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}$$

la valeur prévue pour p est donc :

$$p = \frac{2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4}{2(8 - 8\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4) - (2 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4)} = \frac{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^4}{7(1 - \varepsilon^2) + 2\varepsilon^4} \text{ (F. Perrin) }^{(1)}.$$

27. Remarque sur la prévision théorique des coefficients a_1^4 , a_6^6 , a_9^9 . — Nous voyons ainsi qu'au point de vue expérimental, l'étude du cas de l'excitation par lumière circulaire est suffisant pour déterminer les rapports b et c et par suite permet de prévoir les résultats dans tous les autres cas d'éclairement. Au point de vue théorique il en sera de même. Et la prévision théorique de la polarisation de la lumière émise à la suite d'une excitation par une lumière quelconque découle de la prévision pour le cas où la lumière excitatrice est polarisée circulairement. Ainsi dans le cas de la résonance des vapeurs métalliques, Heisenberg ⁽²⁾ a indiqué la possibilité de calculer la polarisation dans deux cas : celui où l'excitation est linéaire (on considère un champ magnétique évanescent dirigé suivant la vibration électrique) et celui où l'excitation est circulaire (champ évanescent perpendiculaire au plan de la vibration). Le résultat dans le premier cas est une conséquence du résultat dans le second, à condition de ne pas négliger la composante émise perpendiculairement au plan de la vibration circulaire.

⁽¹⁾ F. PERRIN, *loc. cit.*

⁽²⁾ HEISENBERG, *Zeitschrift für Physik*, 31, p. 617 (1926).

Voici le calcul dans le cas de l'émission de la raie verte $\lambda = 5350$ du thallium $\left(2^2P_{\frac{3}{2}} - 2^2S_{\frac{1}{2}}\right)$. Ce n'est pas une raie de résonance car l'état $2^2P_{\frac{3}{2}}$ n'est pas un état normal de l'atome. On l'obtient par excitation à l'aide de la radiation de longueur d'onde $\lambda = 3776 \left(2^2P_{\frac{1}{2}} - 2^2S_{\frac{1}{2}}\right)$ qui permet d'arriver à l'état excité $2^2S_{\frac{1}{2}}$. L'émission peut se faire alors soit en revenant à l'état initial $2^2P_{\frac{1}{2}}$ et la longueur d'onde est $\lambda = 3776$, soit en revenant à l'état métastable $2^2P_{\frac{3}{2}}$ et la longueur d'onde est $\lambda = 5350$. C'est ce cas qui nous intéresse. Nous exciterons en lumière circulaire. Le champ magnétique d'Heisenberg est alors dirigé suivant le faisceau excitateur Ox_3 . Supposons que le sens de la vibration de la lumière circulaire soit de Ox_1 à Ox_2 et que le sens du champ magnétique soit choisi de sorte que l'absorption de la lumière excitatrice entraîne l'augmentation du nombre quantique m d'une unité. L'état initial possédant les deux valeurs de $m = \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, ainsi que l'état final, l'excitation par $\lambda = 3776$ ne peut conduire qu'à la valeur de $m = \frac{1}{2}$. Il n'y a donc qu'un seul état excité défini par $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$. L'émission de $\lambda = 5350$ peut alors se faire de trois façons :

- 1° Passage à l'état final $j = \frac{3}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$ avec émission de lumière circulaire vibrant dans le même sens que la lumière excitatrice.
- 2° Passage à l'état final $j = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ avec émission de lumière rectiligne suivant Ox_3 .
- 3° Passage à l'état final $j = \frac{3}{2}$, $m = \frac{3}{2}$ avec émission de lumière circulaire en sens inverse de la lumière excitatrice.

Nous obtenons les intensités relatives par application des formules de l'effet Zeeman⁽¹⁾ :

$$(1) \quad \begin{cases} I(j, m, j+1, m-1) = (j-m+2)(j-m+1) \\ I(j, m, j+1, m) = 2[(j+1)^2 - m^2] \\ I(j, m, j+1, m+1) = (j+m+2)(j+m+1) \end{cases}$$

Ici $j = m = \frac{1}{2}$. Les intensités relatives sont alors :

$$1, 2, 3.$$

On a à faire la somme :

$$\begin{array}{ccc} L_1 = 1 & L_2 = 1 & L_3 = 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ C_1 = C_2 = C_3 = S_1 = S_2 = 0 & & S_3 = 1 \\ & & 0 \\ & & -3 \end{array}$$

La lumière effectivement émise est donc caractérisée par :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} L_1 = 4 & L_2 = 4 & L_3 = 4 \\ C_1 = C_2 = C_3 = S_1 = S_2 = 0 & & S_3 = -2 \end{array}$$

On en tire :

$$p_0 = 0 \quad p_1 = -\frac{1}{2}$$

d'où :

$$b = 0 \quad c = -1.$$

Nous nous trouvons ici en présence du cas remarquable suivant : la lumière émise par une excitation circulaire est polarisée partiellement suivant une vibration circulaire *en sens inverse* de la vibration excitatrice.

On verrait de même que l'émission de la raie $\lambda = 3529$

(1) GOUDSMITH et KRONIG, *Naturwissenschaften*, 13, p. 90 (1925); KRONIG, *Zeitschrift für Physik*, 31, p. 885 (1925); HENL, *Zeitschrift für Physik*, 31, p. 340 (1925).

$\left(2^2P_{\frac{3}{2}} - 2^2D_{\frac{3}{2}}\right)$ du thallium lors d'une excitation avec la raie $\lambda = 2768$ conduit aux polarisations :

$$p_0 = -\frac{3}{11} \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{5}{8}$$

d'où :

$$b = -6 \quad \text{et} \quad c = 5.$$

Lors d'une excitation par de la lumière circulaire, la lumière polarisée émise est partiellement polarisée suivant une vibration circulaire de même sens que la lumière excitatrice, mais lors d'une excitation rectiligne et d'une observation dans une direction perpendiculaire, la lumière est polarisée rectilignement dans le sens *perpendiculaire* à la vibration excitatrice.

28. Somme algébrique de vibrations. — Tout ceci résulte au fond d'un fait plus général. Considérons une source qui, soumise à une excitation définie par $\mathcal{L}^1, C^1, S^1$, effectue une émission définie par L^1, C^1, S^1 et qui, soumise à une excitation $\mathcal{L}^2, C^2, S^2$, effectue une émission L^2, C^2, S^2 . Supposons que l'ensemble des quantités $\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^2, C^1 - C^2, S^1 - S^2$ puisse correspondre à une excitation réelle, ce qui n'est pas nécessairement vrai, l'émission obtenue serait caractérisée par $L^1 - L^2, C^1 - C^2, S^1 - S^2$. Nous pouvons ainsi parler, au moins dans certains cas, à côté de l'addition de vibrations sans cohérence, également de leur soustraction. Cette notion va nous permettre, alors qu'il est impossible par exemple de considérer une vibration de forme invariable dans l'espace comme le résultat de l'addition de deux ou plusieurs vibrations de formes différentes, de décomposer une vibration ou un ensemble quelconque de vibrations en une somme algébrique de vibrations de forme et de position imposées *a priori*.

Par exemple une vibration rectiligne suivant Ox_3 caracté-

risée par $L_1 = L_2 = 0$, $L_3 = 1$, $C = S = 0$ peut être considérée comme la somme algébrique de 3 systèmes de vibrations, correspondant à de la lumière naturelle, définis par les caractéristiques :

$$\begin{array}{llll}
 (1) & L_1 = \frac{1}{2} & L_3 = \frac{1}{2} & L_2 = 0 \quad C = S = 0 \\
 & L_2 = \frac{1}{2} & L_3 = \frac{1}{2} & L_1 = 0 \quad C = S = 0 \\
 \text{et :} & L_1 = \frac{1}{2} & L_2 = \frac{1}{2} & L_3 = 0 \quad C = S = 0
 \end{array}$$

Les deux premiers sont pris avec le signe plus, l'autre avec le signe moins.

On pourrait ainsi démontrer que, d'une façon général, tout système de vibrations peut toujours être considéré comme une somme algébrique de vibrations circulaires d'intensité et de direction convenablement choisies. Ceci serait impossible avec des vibrations rectilignes et nous montre toute l'importance de l'étude du cas particulier où la vibration excitatrice est circulaire.

29. Domaine d'application. — Maintenant que nous avons pu voir tant au point de vue expérimental que théorique, les services que peut rendre la notation préconisée ici, il convient de rappeler que le domaine d'application de cette théorie est strictement limité par les hypothèses qui ont été faites au cours de l'exposé. Elles sont de deux sortes, les unes relatives à l'émission de la source, les autres à son excitation. Parmi ces dernières, notons que nous avons toujours considéré comme sans influence la direction même de la propagation des vibrations excitatrices. Ceci n'est certainement plus le cas dès que l'on sort du domaine optique pour entrer dans celui où la quantité de mouvement du rayonnement prend une importance non négligeable.

Il est à remarquer en outre que nous avons toujours supposé une source très petite ou constituée par un ensemble

d'éléments très petits, indépendants. La théorie ne s'appliquerait pas à des vibreurs portés par une même molécule, grande par rapport à la longueur d'onde, ces vibreurs étant l'un et l'autre liés en phases avec la lumière excitatrice. Nos hypothèses semblent, au contraire, convenir très bien aux phénomènes de résonance dans les vapeurs métalliques, ceux des solutions fluorescentes et dans certains cas à ceux de diffusion.

DEUXIÈME PARTIE

Dépolarisation par déplacement de l'élément vibreur.

1. Introduction. — Nous avons précédemment étudié, moyennant certaines hypothèses, les relations entre l'excitation et l'émission. Nous allons ici étudier le cas, assez particulier, mais qui paraît s'appliquer à un certain nombre de faits expérimentaux, où l'émission, supposée connue dans l'état normal du milieu excité, subit une perturbation due à une modification de ce milieu indépendante de l'excitation. Voici plus exactement l'hypothèse qui sera faite. Dans l'état normal du milieu, l'émission est la somme des émissions indépendantes de chacun des éléments vibreurs identiques qui constituent la source. Dans l'état troublé, chaque émission élémentaire n'est pas modifiée par rapport à l'élément vibreur qui l'effectue, mais ces éléments vibreurs n'occupent plus la position qu'ils auraient occupée dans l'état normal. Il est bien entendu que nous entendons par élément vibreur aussi bien un seul atome ou une seule molécule, que tout groupement d'atomes ou de molécules, en liaison rigide ou non, qui peut être considéré comme déplacé en bloc par la perturbation considérée. Le problème consiste en le calcul de l'émission nouvelle, connaissant sa valeur normale dans les mêmes conditions d'excitation. Il convient de bien remarquer la différence de ce problème avec celui, dont nous avons traité précédemment un cas particulier, où le milieu source est supposé constitué par une infinité d'éléments anisotropes identiques distribués dans l'espace. Dans le problème qui va nous occuper ce ne sont pas les paramètres caractéristiques du milieu, les α_i^j ou les

A_{ij}^{st} , mais ceux caractéristiques de l'émission, les L, C, S ou les E^{ij} qui restent les mêmes par rapport à des axes liés à chaque élément. Pour fixer les idées nous utiliserons la représentation suivante : dans l'état normal, les éléments vibratoire, atomes par exemple, ne sont pas déplacés entre l'instant de l'excitation et celui de l'émission ; dans le cas troublé, ils ont été au contraire déplacés entre ces deux instants. Ces déplacements pourront être identiques pour tous les éléments, mais seront en général différents et régis par des lois de probabilité. En fait ces déplacements peuvent être dus à un champ magnétique (rotation de Larmor, Elridge ⁽¹⁾) ou à des chocs (mouvement brownien de rotation, Lewschin ⁽²⁾, F. Perrin ⁽³⁾).

Nous traiterons plus loin le cas un peu plus général où certains éléments, au lieu d'émettre nécessairement après une modification de leur direction, n'émettent plus du tout (chocs de seconde espèce). Ce cas se ramène au premier si l'on ne tient pas compte, dans la source normale des éléments dont l'émission est supprimée par la perturbation.

2. Les équations du problème. — Soient Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 des axes fixes dans l'espace et Ox_1, Ox_2, Ox_3 des axes liés à l'un des éléments de la source. S'il y a N éléments identiques indépendants et si l'émission totale de la source dans l'état normal est caractérisée par :

$$L_1, L_2, L_3, C_1, C_2, C_3, S_1, S_2, S_3$$

l'émission caractéristique d'un élément est :

$$\frac{1}{N} L_1, \frac{1}{N} L_2, \frac{1}{N} L_3, \frac{1}{N} C_1, \frac{1}{N} C_2, \frac{1}{N} C_3, \frac{1}{N} S_1, \frac{1}{N} S_2, \frac{1}{N} S_3.$$

ces quantités étant rapportées à Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

⁽¹⁾ ELRIDGE, *Physikal Review*, 24, p. 234 (1924).

⁽²⁾ LEWSCHIN.

⁽³⁾ F. PERRIN, *Journal de Physique et le Radium*, 7, p. 390 (1926).

Si les cosinus directeurs des Ox' par rapport aux Ox sont désignés par α_i^j , l'émission de l'un des éléments rapportée aux Ox' sera :

$$\frac{1}{N} L'_1, \frac{1}{N} L'_2, \frac{1}{N} L'_3, \frac{1}{N} C'_1, \frac{1}{N} C'_2, \frac{1}{N} C'_3, \frac{1}{N} S'_1, \frac{1}{N} S'_2, \frac{1}{N} S'_3,$$

les L' , C' , S' étant liés aux L , C , S par les formules relatives aux changements d'axes correspondants (1^{re} partie, § 15). Et l'émission totale rapportée aux Ox' sera donnée par :

$$(1) \quad \begin{aligned} L'_1 &= \binom{11}{11} L_1 + \binom{11}{22} L_2 + \binom{11}{33} L_3 + 2 \binom{11}{23} C_1 + 2 \binom{11}{31} C_2 + 2 \binom{11}{12} C_3 \\ L'_2 &= \binom{22}{11} L_1 + \binom{22}{22} L_2 + \binom{22}{33} L_3 + 2 \binom{22}{23} C_1 + 2 \binom{22}{31} C_2 + 2 \binom{22}{12} C_3 \\ L'_3 &= \binom{33}{11} L_1 + \binom{33}{22} L_2 + \binom{33}{33} L_3 + 2 \binom{33}{23} C_1 + 2 \binom{33}{31} C_2 + 2 \binom{33}{12} C_3 \\ C'_1 &= \binom{23}{11} L_1 + \binom{23}{22} L_2 + \binom{23}{33} L_3 + [\binom{23}{23} + \binom{23}{32}] C_1 \\ &\quad + [\binom{23}{31} + \binom{23}{13}] C_2 + [\binom{23}{12} + \binom{23}{21}] C_3 \\ C'_2 &= \binom{31}{11} L_1 + \binom{31}{22} L_2 + \binom{31}{33} L_3 + [\binom{31}{23} + \binom{31}{32}] C_1 \\ &\quad + [\binom{31}{31} + \binom{31}{13}] C_2 + [\binom{31}{12} + \binom{31}{21}] C_3 \\ C'_3 &= \binom{12}{11} L_1 + \binom{12}{22} L_2 + \binom{12}{33} L_3 + [\binom{12}{23} + \binom{12}{32}] C_1 \\ &\quad + [\binom{12}{31} + \binom{12}{13}] C_2 + [\binom{12}{12} + \binom{12}{21}] C_3 \\ S'_1 &= [\binom{23}{23} - \binom{23}{32}] S_1 + [\binom{23}{31} - \binom{23}{13}] S_2 + [\binom{23}{12} - \binom{23}{21}] S_3 \\ S'_2 &= [\binom{31}{23} - \binom{31}{32}] S_1 + [\binom{31}{31} - \binom{31}{13}] S_2 + [\binom{31}{12} - \binom{31}{21}] S_3 \\ S'_3 &= [\binom{12}{23} - \binom{12}{32}] S_1 + [\binom{12}{31} - \binom{12}{13}] S_2 + [\binom{12}{12} - \binom{12}{21}] S_3 \end{aligned}$$

en désignant par $\binom{ik}{jl}$ chacune des quantités moyennes $\alpha_i^j \alpha_l^k$ relatives à l'ensemble des éléments après la perturbation.

Le problème revient à calculer dans chaque cas particulier ces quantités $\binom{ik}{jl}$. En remarquant que par suite de la définition de ces quantités :

$$(2) \quad \binom{ik}{jl} = \binom{li}{kj}$$

nous voyons qu'il y en a au plus 45 distinctes. Ces 45 ne sont d'ailleurs pas indépendantes car on a les relations :

$$(3) \quad \sum_{s,ss} \binom{is}{ss} = 1 \text{ ou } 0$$

suivant que : $i = j$ ou $i \neq j$

$$(4) \quad \text{et aussi :} \quad \Sigma_s^{(ss)} = 1 \text{ ou } 0$$

suivant que : $i = j$ ou $i \neq j$.

Par la suite nous poserons :

$$(5) \quad \begin{cases} L'_i = b^j_i L_j + b^{j+3}_i C_j + b^{j+6}_i S_j \\ C'_i = b^{j+3}_i L_j + b^{j+3}_i C_j + b^{j+6}_i S_j \\ S'_i = b^{j+6}_i L_j + b^{j+3}_i C_j + b^{j+6}_i S_j \end{cases}$$

Ces formules sont identiques à celles qui lient les L, C, S aux $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ où l'on a changé b en a .

$$(6) \quad \text{Mais ici :} \quad b^{j+6}_i = b^{j+3}_i = b^{j+6}_i = b^{j+3}_i = 0.$$

On vérifie en effet, dans les formules de transformation (1) que les $L' C'$ ne dépendent que des L, C et les S' ne dépendent que des S . Ce sont ces relations annulant un certain nombre de quantités b qui nous ont fait préférer dans cette question l'emploi des quantités L, C, S à celui des quantités tensorielles générales E^{ij} .

On a de plus :

$$(7) \quad \Sigma_s b^i_s = \Sigma_s b^s_i = 1$$

et :

$$(8) \quad \Sigma_s b^{i+3}_s = \Sigma_s b^s_{i+3} = 0$$

qui sont sous une autre forme les équations (3) et (4).

3. Les symétries. — On voit que toute perturbation du type étudié est caractérisée par l'ensemble des déplacements des éléments et par suite par un ensemble de rotations. Si cet ensemble possède des éléments de symétrie, rendus nécessaires par la symétrie de la cause perturbatrice et celle du milieu, nous

obtiendrons de nouvelles relations entre les $(_{jl}^{ik})$. Nous pourrions les obtenir par un raisonnement direct. Nous remarquerons plutôt qu'un problème identique a été résolu quand on a obtenu les relations entre les a_i^j exigées par les mêmes éléments de symétrie. En effet, puisque par un changement d'axes de coordonnées, les quantités $L, C, S; L', C', S'$ se transforment suivant des formules identiques, les quantités b_i^j se transforment suivant les mêmes formules que les a_i^j . Une condition de symétrie étant toujours une condition d'invariance vis-à-vis de certains changements d'axes, à toute relation entre les a exigée par une condition de symétrie vérifiée par le milieu antérieurement à l'excitation, correspond la même relation entre les b exigée par la même condition de symétrie vérifiée par l'ensemble des rotations qui constitue la perturbation étudiée.

4. Symétrie du champ magnétique. — C'est le cas, en particulier, si le milieu se trouve dans un champ magnétique et si l'hypothèse d'Elridge est vérifiée. L'hypothèse d'Elridge revient en effet à supposer que les éléments vibrateurs sont, dans un champ magnétique faible, animés d'un mouvement de rotation uniforme analogue à la rotation de Larmor d'une orbite électronique. Entre l'instant de l'excitation et celui de l'émission, l'élément vibrateur a donc tourné autour de la direction du champ magnétique d'un angle proportionnel à la durée de l'état excité. On se trouve donc dans le cas de l'hypothèse générale : la perturbation de l'émission est due aux déplacements des éléments vibrateurs. Il est certain que dans ce cas l'ensemble de ces déplacements présente la symétrie d'un champ magnétique. Si l'axe de symétrie est l'axe Ox_3 , il faut que pour toute rotation du système d'axes autour de Ox_3 , les coefficients b ne varient pas. Du résultat obtenu sur les a (I, § 19, Eq. 4) et des relations particulières entre les b nous obtenons :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} L'_1 = b^1_1 L_1 + b^2_1 L_2 + b^3_1 L_3 + b^6_1 C_3 \\ L'_2 = b^2_1 L_1 + b^1_2 L_2 + b^3_2 L_3 - b^6_2 C_3 \\ L'_3 = b^3_1 L_1 + b^1_3 L_2 + b^2_3 L_3 \\ C'_1 = b^4_1 C_1 + b^5_1 C_2 \\ C'_2 = -b^3_2 C_1 + b^4_2 C_2 \\ C'_3 = \frac{1}{2} b^6_1 (L_2 - L_1) + b^6_3 C_3 \\ S'_1 = b^7_1 S_1 + b^8_1 S_2 \\ S'_2 = -b^8_2 S_1 + b^7_2 S_2 \\ S'_3 = b^9_3 S_3 \end{array} \right.$$

avec les relations suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^2_1 = \frac{1}{2} [1 - 2b^1_1 + b^3_1] \\ b^3_1 = \frac{1}{2} [1 - b^2_1] \\ b^6_1 = \frac{1}{2} [4b^1_1 - b^3_1 - 1] \end{array} \right.$$

Nous voyons ainsi que les seules quantités indépendantes sont :

$$\begin{array}{lll} b^1_1 = \overline{(\alpha^1_1)^2} & b^3_1 = \overline{(\alpha^3_1)^2} & \\ b^6_1 = \overline{\alpha^1_1 \alpha^1_2} & b^4_1 = \overline{\alpha^2_2 \alpha^3_3} + \overline{\alpha^2_3 \alpha^3_2} & b^5_1 = \overline{\alpha^2_3 \alpha^3_1} + \overline{\alpha^2_1 \alpha^3_3} \\ b^7_1 = \overline{\alpha^1_1} & b^8_1 = \overline{\alpha^1_2} & b^9_1 = \overline{\alpha^3_3} \end{array}$$

Nous calculerons plus loin ces coefficients dans des cas particuliers.

5. Symétrie du champ électrique. — C'est le cas par exemple où le milieu se trouve dans un champ magnétique assez intense pour provoquer une rotation de Larmor de plusieurs circonférences pendant la durée de l'excitation. On a entre les b , en plus des relations du cas précédent les relations supplémentaires :

$$b^6_1 = 0 \quad b^5_1 = 0 \quad b^9_1 = 0.$$

6. **Isotropie.** — C'est par exemple le cas des chocs de probabilité isotrope. On a alors en plus des relations précédentes les relations suivantes :

$$b_1^4 = b_3^3 \quad b_4^4 = b_6^6 \quad b_7^7 = b_9^9.$$

Les relations s'écrivent :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1' = b_3^3 L_1 + \frac{1}{2} (1 - b_3^3) (L_2 + L_3) \\ L_2' = b_3^3 L_2 + \frac{1}{2} (1 - b_3^3) (L_3 + L_1) \\ L_3' = b_3^3 L_3 + \frac{1}{2} (1 - b_3^3) (L_1 + L_2) \\ C_1' = \frac{1}{2} (3b_3^3 - 1) C_1 \\ C_2' = \frac{1}{2} (3b_3^3 - 1) C_2 \\ C_3' = \frac{1}{2} (3b_3^3 - 1) C_3 \\ S_1' = b_9^9 S_1 \\ S_2' = b_9^9 S_2 \\ S_3' = b_9^9 S_3 \end{array} \right.$$

On voit qu'il ne s'introduit plus maintenant que :

$$(2) \quad b_3^3 = \overline{(\alpha_3^3)^2} \quad \text{et} \quad b_9^9 = \overline{\alpha_3^3}.$$

Par suite de l'isotropie, si θ est l'angle que fait avec son ancienne position une droite quelconque liée à l'un des éléments déplacés, on a :

$$(3) \quad b_3^3 = \overline{\cos^2 \theta} \quad b_9^9 = \overline{\cos \theta}$$

les moyennes s'étendant à l'ensemble des éléments déplacés.

Nous poserons :

$$(4) \quad b_9^9 = \overline{\cos \theta} = q \quad \text{et} \quad \frac{3b_3^3 - 1}{2} = \frac{3 \overline{\cos^2 \theta} - 1}{2} = d.$$

Nous voyons qu'un ensemble isotrope de déplacements est caractérisé par les deux constantes d et q .

7. Chocs multiples. — Nous voyons qu'un choc d'une certaine espèce est caractérisé par les deux quantités d et q . Supposons qu'il se produise 2 chocs à la suite, pendant le temps où l'élément est à l'état excité.

Le premier choc étant caractérisé par d_1, q_1 , l'émission qui se produirait normalement à la suite du premier choc serait définie par L', C', S' et les formules du paragraphe 6 où d et q prennent les valeurs d_1 et q_1 nous donnent ces quantités en fonction des L, C, S .

On a en particulier :

$$C'_3 = d_1 C_3 \quad \text{et} \quad S'_3 = q_1 S_3.$$

Après le deuxième choc, l'émission effective L'', C'', S'' s'obtiendra à partir de l'émission $L'C'S'$ par les mêmes formules où $d = d_2, q = q_2$. En particulier :

$$C''_3 = d_2 C'_3 \quad \text{et} \quad S''_3 = q_2 S'_3.$$

On voit donc que, d et q étant les caractéristiques de la perturbation totale :

$$C''_3 = d C_3 \quad \text{et} \quad S''_3 = q S_3.$$

On en tire :

$$(1) \quad d = d_1 \times d_2 \quad q = q_1 \times q_2.$$

On en conclut qu'on peut inverser l'ordre des chocs sans changer le résultat.

De plus, si on a, non seulement deux, mais plusieurs chocs, ces formules se généralisent en :

$$(2) \quad d = \prod_n d_n \quad q = \prod_n q_n.$$

En particulier si les chocs sont de même nature :

$$d_2 = d_3 = \dots = d_n = d_1$$

$$q_2 = q_3 = \dots = q_n = q_1$$

$$d = d_1^n \quad q = q_1^n$$

Ces formules sont implicitement contenues dans la thèse de F. Perrin⁽¹⁾ qui a étudié, dans le cas général, le produit et l'itération des répartitions sphériques.

8. Chocs infiniment petits. Mouvement brownien de rotation.

— Nous allons retrouver la généralisation faite par F. Perrin⁽²⁾ de la formule d'Einstein limitée au cas des déplacements infiniment petits.

Un temps Δt infiniment petit après l'émission, on suppose que :

$$\overline{\theta^2} = 2K\Delta t.$$

Tout se passe comme si l'on avait eu un choc infiniment petit caractérisé par :

$$(1) \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{3}{2} \overline{\cos^2 \theta} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (1 - \overline{\theta^2}) - \frac{1}{2} = 1 - 3K\Delta t \\ q_1 &= \overline{\cos \theta} = \left(1 - \frac{\overline{\theta^2}}{2} \right) = 1 - K\Delta t. \end{aligned}$$

Au bout du temps t , il se sera produit $\frac{t}{\Delta t}$ chocs.

On aura donc :

$$(2) \quad \begin{aligned} d_t &= (1 - 3K\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{-3Kt} \\ q_t &= (1 - K\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{-Kt}. \end{aligned}$$

On voit que :

$$\overline{\cos^2 \theta}_t = \frac{2d_t + 1}{3} = \frac{2}{3} e^{-3Kt} + \frac{1}{3}.$$

9. Chocs finis. — Dans le cas de la résonance des vapeurs métalliques en présence d'un gaz étranger, un choc produit sans doute une rotation finie de l'atome. Nous supposons

(1) F. PERRIN. *Thèse*, Gauthier-Villars, Paris (1928).

(2) F. PERRIN. *Journal de Physique et le Radium*, loc. cit.

ici que l'atome reste toujours excité après le choc (absence de chocs de deuxième espèce). Ces chocs pourront être de même nature (chocs de l'atome excité avec d'autres atomes identiques entre eux), ou de nature différente (choc avec des atomes différents). Ce dernier cas peut toujours se ramener au premier, mais il peut être intéressant de le distinguer de celui-ci.

On peut alors faire une analyse complète du phénomène et obtenir les quantités moyennes d et q en groupant parmi les atomes effectuant leur émission entre les temps t et $t + \Delta t$ après leur excitation, ceux qui ont reçu un nombre identique de chocs de même nature. Il est plus rapide de faire une analyse dans le temps (F. Perrin).

Supposons d'abord que tous les chocs soient de même nature et caractérisés par les valeurs D et Q . Soit $cN\Delta t$ le nombre de ceux, parmi N atomes, qui ont subi un de ces chocs entre les instants t et $t + \Delta t$. Entre ces 2 instants parmi les N atomes, $N(1 - c\Delta t)$ ne se déplaceront pas, tandis que les autres $Nc\Delta t$ subiront des déplacements caractérisés par D et Q . En remarquant que pour un déplacement nul, les quantités D et Q sont égales à 1, l'ensemble des déplacements de ces N atomes sera caractérisé par :

$$(1) \quad \begin{cases} d_{\Delta t} = \frac{1}{N} [N(1 - c\Delta t) + Nc\Delta t D] = 1 - c(1 - D)\Delta t \\ q_{\Delta t} = \frac{1}{N} [N(1 - c\Delta t) + Nc\Delta t Q] = 1 - c(1 - Q)\Delta t \end{cases}$$

La généralisation est évidente dans le cas où les chocs sont de natures diverses, caractérisées par D_i , Q_i , les probabilités respectives étant $c_i\Delta t$.

$$(2) \quad \begin{cases} d_{\Delta t} = 1 - \Delta t \sum_i c_i (1 - D_i) \\ q_{\Delta t} = 1 - \Delta t \sum_i c_i (1 - Q_i) \end{cases}$$

Revenons au premier cas, au temps t après l'émission les

quantités moyennes d_t , q_t seront les produits de ces quantités moyennes $d_{\Delta t}$, $q_{\Delta t}$ en nombre égal à $\frac{t}{\Delta t}$

$$(3) \quad \begin{cases} d_t = d_{\Delta t}^{\frac{t}{\Delta t}} = [1 - c(1 - D)\Delta t]^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{-c(1-D)t} \\ q_t = q_{\Delta t}^{\frac{t}{\Delta t}} = [1 - c(1 - Q)\Delta t]^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{-c(1-Q)t} \end{cases}$$

Nous supposons maintenant que la probabilité, pour un atome encore excité à l'instant t , d'une émission entre les instants t et $t + \Delta t$ après l'excitation est $l\Delta t$. Soit N_0 le nombre des atomes excités à l'instant 0, N celui de ceux parmi eux qui restent encore excités à l'instant t . Le nombre de ceux effectuant leur émission entre l'instant t et $t + \Delta t$ est :

$$n = -\Delta N = lN\Delta t$$

on en déduit :

$$N = N_0 e^{-lt}$$

et :
$$n = lN_0 e^{-lt} \Delta t$$

Il en résulte que les quantités d et q relatives à l'ensemble des déplacements des atomes entre l'instant d'excitation et celui de l'émission seront :

$$(4) \quad \begin{cases} d = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty d_t l N_0 e^{-lt} dt = \int_0^\infty l e^{-[c(1-D) + l]t} dt \\ \quad \quad \quad = \frac{1}{1 + \frac{c(1-D)}{l}} \\ q = \frac{1}{1 + \frac{c(1-Q)}{l}} \end{cases}$$

On voit ainsi que la connaissance de d et q nous fournit les quantités $\frac{c}{l}(1 - D)$ et $\frac{c}{l}(1 - Q)$. Si l'on connaît en outre l , on connaîtra $c(1 - D)$ et $c(1 - Q)$ mais non les 3 quantités c , D et Q qui interviennent dans le problème.

Les quantités $c(1 - D)$ et $c(1 - Q)$ caractérisent l'ensemble des déplacements dans un temps infiniment petit. Si les déplacements élémentaires sont *tous* infiniment petits, on est dans le cas du paragraphe précédent. On a alors :

$$c(1 - D) = 3K$$

$$c(1 - Q) = K.$$

D'où :

$$c(1 - D) = 3c(1 - Q).$$

Si au contraire certains des chocs sont finis, F. Perrin a montré que cette égalité était remplacée par l'inégalité :

$$c(1 - D) < 3c(1 - Q).$$

10. Mesure expérimentale des quantités d et q . — Nous nous limiterons au cas où le milieu était isotrope avant la perturbation. Il le demeure. Excitons le milieu avec un faisceau de lumière circulaire dirigé suivant Ox_3 . On observe suivant Ox_2 , une radiation partiellement polarisée, la polarisation étant rectiligne et de vibration dirigée suivant Ox_1 , le taux de polarisation étant :

$$p'_0 = \frac{L'_1 - L'_3}{L'_1 + L'_3}$$

et suivant Ox_3 une radiation partiellement polarisée, la polarisation étant circulaire, le taux de polarisation étant :

$$p'_1 = \frac{S'_3}{L'_1}.$$

On aurait les mêmes relations avec les quantités non primées en supprimant la perturbation isotrope du milieu.

Remarquons que ici $L_1 = L_2$ et $L'_1 = L'_2$, On a :

$$\frac{1}{p_0} = \frac{L'_1 + L'_3}{L'_1 - L'_3} = \frac{(L_1 + L_3)(d + 2) + 2L_2(1 - d)}{(L_1 - L_3)3d},$$

tandis que :

$$\frac{1}{p_0} = \frac{L_1 + L_3}{L_1 - L_3},$$

or :

$$\frac{2L_2}{L_1 - L_3} = \frac{2L_1}{L_1 - L_3} = \frac{L_1 + L_3}{L_1 - L_3} + \frac{L_1 - L_3}{L_1 - L_3} = \frac{1}{p_0} + 1.$$

D'où :

$$(1) \quad \frac{1}{p'_0} = \frac{1}{p_0} \frac{1}{d} + \frac{1-d}{3d} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{p'_0} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{3} \right).$$

D'un autre côté :

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{L'_1}{S'_3} = \frac{L'_1 + L'_2 + L'_3}{S'_3} \times \frac{p'_0 + 1}{3p'_0 + 1} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{qS_3} \frac{p'_0 + 1}{3p'_0 + 1}$$

et

$$(2) \quad \frac{1}{p'_1} \frac{3p'_0 + 1}{p'_0 + 1} = \frac{L_1}{qS_3} \frac{3p_0 + 1}{p_0 + 1} = \frac{1}{qp_1} \frac{3p_0 + 1}{p_0 + 1}.$$

On voit que si $p_1 = 0$, $p'_1 = 0$ également et il est impossible de mesurer q .

Dans le cas où on éclaire avec de la lumière rectiligne vibrant suivant Ox_1 , on observe $p' = \frac{L'_1 - L'_3}{L'_1 + L'_3}$.

Sans la perturbation on observerait $p = \frac{L_1 - L_3}{L_1 + L_3}$.

Remarquons que ici $L_2 = L_3$ $L'_2 = L'_3$

$$\frac{1}{p'} = \frac{L'_1 + L'_3}{L'_1 - L'_3} = \frac{(L_1 + L_3)(d + 2) + 2L_2(1 - d)}{(L_1 - L_3)3d},$$

or :

$$\frac{2L_2}{L_1 - L_3} = \frac{2L_3}{L_1 - L_3} = \frac{L_1 + L_3}{L_1 - L_3} - \frac{L_1 - L_3}{L_1 - L_3} = \frac{1}{p} - 1$$

$$(3) \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} \frac{1}{d} - \frac{1-d}{3d} \quad \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3} \right).$$

Formule déjà obtenue par F. Perrin ⁽¹⁾ et qui a subi dans le cas du mouvement brownien de rotation une comparaison tout à fait satisfaisante avec les résultats expérimentaux.

On vérifiera que $\frac{1}{p'} = \frac{2}{p} - 1$ en même temps que $\frac{1}{p_0} = \frac{2}{p} - 1$.

11. Cas d'un champ magnétique. — Nous supposons que le milieu est soumis à un champ magnétique suivant Ox_3 et que ce champ agit suivant l'hypothèse d'Elridge. Ce champ fait tourner autour de l'axe Ox_3 l'ensemble des éléments en nombre N_0 avec une vitesse angulaire $\omega = KH$, de sorte qu'un élément de durée de vie t aura tourné autour de Ox_3 d'un angle $\varphi = \omega t$. Pour cet élément, les quantités b qui permettent de déterminer l'émission perturbée à partir de l'ancienne s'expriment à l'aide des cosinus directeurs :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$(I) \begin{cases} N_0 b_1^1 = \cos^2 \varphi & N_0 b_3^3 = 1 & N_0 b_1^6 = -\sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ N_0 b_4^4 = \cos \varphi & N_0 b_4^5 = \sin \varphi \\ N_0 b_7^7 = \cos \varphi & N_0 b_7^8 = -\sin \varphi & N_0 b_9^9 = 1. \end{cases}$$

La probabilité d'une durée de vie comprise entre t et $t + \Delta t$ étant :

$$\frac{n}{N_0} = l e^{-lt} \Delta t.$$

La perturbation due au champ magnétique sera caractérisée par les valeurs suivantes des coefficients b .

⁽¹⁾ F. PERRIN. *Loc. cit.*

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} b_1^1 = \int_0^\infty \cos^2(KHt) e^{-lt} \Delta t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{KH}{l} \right)^2} \\ - b_1^6 = \int_0^\infty \sin(KHt) \cdot \cos(KHt) e^{-lt} \Delta t = \frac{\frac{KH}{l}}{1 + 4 \left(\frac{KH}{l} \right)^2} \\ b_4^4 = b_7^7 = \int_0^\infty \cos(KHt) e^{-lt} \Delta t = \frac{1}{1 + \left(\frac{KH}{l} \right)^2} \\ - b_7^8 = b_4^5 = \int_0^\infty \sin(KHt) e^{-lt} \Delta t = \frac{\frac{KH}{l}}{1 + \left(\frac{KH}{l} \right)^2} \\ b_3^3 = b_9^9 = 1. \end{array} \right.$$

Si H est assez grand pour produire une rotation de Larmor d'un grand nombre de circonférences on a :

$$b_1^1 = \frac{1}{2} \quad b_1^6 = b_4^4 = b_7^7 = b_7^8 = -b_4^5 = 0 \quad b_3^3 = b_9^9 = 1$$

alors :

$$b_1^2 = \frac{1}{2} \quad b_1^3 = b_6^6 = 0.$$

12. Mesure expérimentale de $\frac{KH}{l}$. — En général on éclaire suivant Ox_2 avec de la lumière rectiligne suivant Ox_1 . On observe suivant Ox_3 .

$$(1) \quad p' = \frac{L'_1 - L'_2}{L'_1 + L'_2} = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} (b_2^1 - b_1^2) = p(2b_1^4 - 1) \\ = p \frac{1}{1 + 4 \frac{K^2 H^2}{l^2}}.$$

Si l'on avait éclairé en lumière naturelle, on aurait eu :

$$(2) \quad p'_0 = p_0 \frac{1}{1 + 4 \frac{K^2 H^2}{l^2}}.$$

Cette formule est inapplicable si $p = p_0 = 0$, ce qui est

par exemple le cas de la résonance de la raie D_1 du sodium et de la raie verte du thallium.

Excitons avec de la lumière circulaire suivant Ox_2 et observons suivant Ox_1 . Ici $L'_1 = L'_2 = L'_3 = L_1 = L_2 = L_3$.

Mais la lumière est polarisée circulairement d'une façon partielle.

$$p'_1 = \frac{S'_1}{L_3} = b'_7 \frac{S_2}{L_3} = p_1 \frac{\frac{KH}{l}}{1 + \frac{K^2 H^2}{l^2}}.$$

Comme ici $p_1 \neq 0$, le calcul de $\frac{KH}{l}$ est possible et par suite celui de l connaissant KH .

13. Chocs de seconde espèce. — Jusqu'à présent nous ne nous sommes occupés que du cas où la perturbation ne consistait qu'en un déplacement des éléments vibrateurs. On sait qu'il peut se produire aussi à la suite de certains chocs le retour de l'atome à l'état normal sans émission de lumière. Alors, comme nous l'avons déjà dit les calculs sont ramenés au cas précédent en ne considérant que les éléments qui effectuent réellement leur émission. Supposons N_0 éléments excités à l'instant O et soit N le nombre de ces éléments encore excités à l'instant t , le nombre de ceux-ci qui subiront un choc de l'espèce considérée entre les instants t et $t + \Delta t$ sera :

$$n' = fN\Delta t.$$

Comme il y en a d'autre part :

$$n = lN\Delta t,$$

qui effectuent leur émission à ce moment, on a :

$$\Delta N = -(n + n') = -(l + f)N\Delta t.$$

On en conclut :

$$N = N_0 e^{-(l+f)t}$$

$$n = lN_0 e^{-(l+f)t} \Delta t$$

et le nombre total des éléments qui effectuent réellement leur émission est égal ⁽¹⁾ à :

$$(1) \quad \int_0^{\infty} l N_0 e^{-(l+f)t} dt = \frac{l N_0}{l+f}.$$

S'il se produit en outre des chocs ordinaires caractérisés par D, Q et la probabilité $c \Delta t$ nous savons que pour les n éléments effectuant leur émission entre t et $t + \Delta t$, la valeur moyenne de d et de q est :

$$d_t = e^{-c(1-D)t}$$

$$q_t = e^{-c(1-Q)t}.$$

Et la valeur moyenne de d et q pour l'ensemble des éléments effectuant réellement leur émission est :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} d &= \frac{\int l N_0 e^{-(l+f)t} e^{-c(1-D)t} \Delta t}{\frac{l N_0}{l+f}} \\ &= \frac{l}{(l+f) + c(1-D)} = \frac{1}{1 + \frac{c(1-D)}{l+f}} \\ q &= \frac{1}{1 + \frac{c(1-Q)}{l+f}} \end{aligned} \right.$$

Il faudra ensuite dans les formules donnant L' , C' , S' réduire chacune des quantités L , C , S dans le rapport $\frac{l}{l+f}$, puisque ce dernier rapport est celui du nombre d'éléments ayant effectué leur émission à celui de ceux excités. Nous voyons qu'en ce qui concerne la polarisation, l'introduction de chocs de deuxième espèce revient à augmenter la probabilité d'émission de la quantité $f \Delta t$.

(1) STERN et VOLMER, *Physikalische Zeitschrift*, 20, p. 183 (1919).

14. Vérification expérimentale. — Nous appliquerons les dernières formules au cas où une vapeur en résonance est mélangée à un gaz étranger. Il y a toujours une fraction plus ou moins importante des chocs qui est constituée par des chocs de deuxième espèce. Les quantités c et f' sont des fonctions de la pression du gaz étranger et en première approximation ces quantités sont proportionnelles à cette pression P .

$$c = \gamma P \quad f' = \varepsilon P.$$

Les formules du paragraphe précédent fournissent la polarisation p' en fonction de P .

Nous supposons l'excitation faite en lumière rectiligne. On a :

$$(1) \quad \frac{P\gamma(1-D)}{l + \varepsilon P} = \frac{1}{d} - 1 = \frac{\frac{1}{p'} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{3}}.$$

Pour la confrontation avec l'expérience, il est préférable de mettre sous la forme :

$$(2) \quad \frac{P}{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{l} P}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3}\right) \frac{\gamma}{l} (1-D)}.$$

On voit que la courbe de p' en fonction de P est une branche d'hyperbole passant par le point $P = 0$. $p' = p$ et possédant une asymptote parallèle à l'axe des P . L'ordonnée de cette asymptote n'est nulle que si $\varepsilon = 0$ (absence de chocs de seconde espèce).

Nous allons appliquer cette formule au cas étudié expérimentalement par Keussler⁽¹⁾ de la résonance du mercure en présence de gaz étrangers He, N², Co², H², O².

Voici, d'après les courbes publiées, les valeurs obtenues pour la quantité $\frac{P}{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$ (P mesuré en millimètres de mercure).

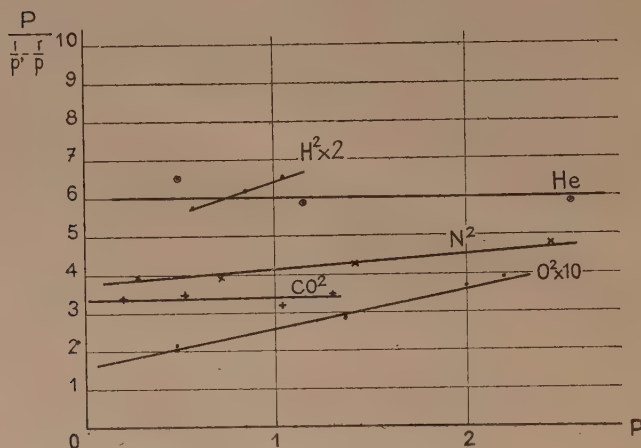
(1) KEUSSLER, *Annalen der Physik*, 82, p. 793, 1927.

	P	$\frac{1}{p'}$	$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$	$\frac{P}{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$
He	2,55	5,62	4,37	0,584
	1,15	3,21	1,96	0,587
	0,5	2,02	0,77	0,650
	0	1,25		
N ²	2,45	6,42	5,17	0,474
	1,42	4,50	3,25	0,427
	0,72	3,07	1,82	0,395
	0,28	1,96	0,71	0,394
	0	1,25		
CO ²	1,3	5	3,75	0,346
	1,04	4,5	3,25	0,320
	0,53	2,76	1,51	0,350
	0,21	1,88	0,63	0,337
	0	1,25		
H ²	1,04	2,04	0,79	1,31
	0,85	1,94	0,69	1,23
	0,575	1,75	0,50	1,15
	0	1,25		
O ²	2,2	1,82	0,57	3,85
	1,36	1,73	0,48	2,84
	0,485	1,48	0,23	2,1
	0	1,25		

Les nombres donnés dans la dernière colonne devraient varier linéairement avec P. Sauf dans le cas de l'oxygène et de l'hydrogène et peut être dans celui de l'azote, on peut considérer ces nombres comme constants. Cela prouverait que $\frac{\varepsilon}{l} P$ reste petit devant 1 et que sauf pour l'oxygène et l'hydrogène, il se produit un nombre relativement petit de chocs de deuxième espèce, pendant la durée normale de vie de l'atome à l'état excité. Malheureusement ce n'est que qualitativement d'accord avec les mesures faites par Stuart ⁽¹⁾ sur

(1) STUART, *Zeitschrift für Physik*, 32, p. 262, 1925.

l'intensité du rayonnement émis par résonance en fonction de la pression du gaz étranger. Pour l'hydrogène, aux pressions de l'ordre de 1 mm., la polarisation ne devrait presque plus varier avec la pression. Pour l'oxygène, la variation de $\frac{P}{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$ avec P permet de calculer la valeur de $\frac{l}{\varepsilon}$, c'est-à-dire la pression d'oxygène qui réduit de moitié l'intensité



Courbes donnant d'après les résultats publiés par Keussler la quantité $\frac{P}{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$ en fonction de la pression P du gaz étranger.

P est mesuré en mm de mercure. Les lectures de $\frac{P}{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$ sont valables pour O₂, elles sont à diviser par 5 pour H₂ et par 10 pour He, N₂ et CO₂.

de la lumière émise par résonance. On obtient la valeur 1 mm. 6 qui est 5 fois plus grande que celle de Stuart. Il conviendrait de s'assurer de la certitude des valeurs expérimentales. Les mesures faites par Keussler avec une cellule photo-électrique n'ont pas sans doute la même précision quand

l'intensité lumineuse diminue. On remarquera en notre faveur certaines observations qualitatives de Hanle ⁽¹⁾. Il resterait à voir ensuite si la diminution de l'intensité de la lumière émise lors de la présence d'un gaz étranger n'est pas imputable par exemple dans le cas de l'hydrogène à la formation métastable de combinaisons moléculaires. De toute façon on peut dire qu'en première approximation la formule n'est pas incompatible avec les résultats expérimentaux dans le cas de la résonance de même que la formule analogue pour le mouvement brownien de rotation s'applique, comme l'a montré F. Perrin, à l'étude des solutions fluorescentes.

(1) HANLE, *Zeitschrift für Physik*, 30, p. 93, 1924.

TROISIÈME PARTIE

Théorie de l'absorption anisotrope.

1. **Introduction.** — On peut étudier des modes généraux de dépolarisation autres que celui que nous avons étudié dans la précédente partie. Il peut par exemple se produire de la dépolarisation par fluorescence secondaire ou mieux par résonance secondaire. Dans ces cas la lumière émise dans toutes les directions par les points du milieu qui se trouvent sur le trajet du faisceau excitateur est absorbée à son tour et provoque une émission secondaire qui, étant donnée son origine, possède une polarisation tout à fait différente de celle de l'émission primaire. Pour faire les calculs on est amené à étudier l'absorption d'un faisceau lumineux traversant le milieu, c'est-à-dire la variation de ses paramètres tout le long de son parcours. Dans les cas expérimentaux usuels cette absorption est isotrope et les divers paramètres du faisceau subissent des décroissances exponentielles identiques, ne dépendant pas de la direction du faisceau à l'intérieur du milieu. Laissant de côté le problème général de la résonance secondaire, nous nous sommes attachés ici à traiter le problème de l'absorption anisotrope pour montrer en particulier les services que pouvaient rendre aussi dans ce problème les paramètres caractéristiques que nous avons utilisés jusqu'à présent. Ce sera en même temps l'occasion de préciser un peu ces quantités quand le milieu est constitué par des éléments vibreurs disséminés dans l'espace avec une densité moyenne sinon uniforme du moins variant d'une façon continue avec la position du point considéré.

2. Absorption sur le trajet d'un faisceau. — Un faisceau est caractérisé par les quantités μ , ν , γ , σ dont les rapports définissent la polarisation du faisceau tandis que $\mu + \nu$ représente l'énergie traversant une section du faisceau pendant l'unité de temps. S'il se produit de l'absorption sur le trajet du faisceau, cette énergie dépend de la section considérée du faisceau et si cette absorption est anisotrope la polarisation même de la lumière est modifiée tout le long du parcours.

Nous mettrons en œuvre, en ce qui concerne l'absorption, une série d'hypothèses de plus en plus générales.

Nous admettrons pour commencer qu'il existe un type particulier de mouvement vibratoire elliptique perpendiculaire au faisceau et tel que par rapport à lui la vibration lumineuse à chaque instant se décompose en deux vibrations : l'une du type considéré, l'autre du type opposé (point diamétralement opposé sur la sphère de Poincaré) ayant une différence de phase bien définie. Après le trajet dr la première vibration a subi une diminution d'amplitude dans le rapport $1 - Kdr$, l'autre n'a pas été modifiée. Nous supposons tout d'abord qu'il ne se produit pas de modification de phase. Nous allons chercher, désignant par μ , ν , γ , σ les paramètres caractérisant le faisceau en un point de son parcours, les valeurs nouvelles de ces quantités après le parcours supplémentaire dr .

En réalité dans ce problème, afin de passer plus facilement d'un type de vibration à un autre, nous utiliserons plutôt les quantités correspondantes I, M, C, S.

Considérons tout d'abord un exemple. Supposons que le type de vibration par rapport auquel se fait l'absorption soit la vibration rectiligne suivant Ox . Toute vibration élémentaire, au point P, du faisceau lumineux peut s'écrire :

$$(1) \quad x = p \cos \omega t \quad y = q \cos (\omega t + \alpha).$$

Après le parcours dr , la vibration élémentaire est :

$$(2) \quad x' = p(1 - Kdr) \cos \omega t \quad y' = q \cos (\omega t + \alpha).$$

Au point P on a :

$$(3) \quad \begin{cases} I = \sum_i (p_i^2 + q_i^2) & M = \sum_i (p_i^2 - q_i^2) \\ C = \sum_i p_i q_i \cos \alpha_i & S = \sum_i p_i q_i \sin \alpha_i \end{cases}$$

Après le parcours dr , ces quantités sont devenues :

$$(4) \quad \begin{cases} I + dI = \sum_i [p_i^2(1 - 2Kdr) + q_i^2] = I - K(I + M)dr \\ M + dM = \sum_i [p_i^2(1 - 2Kdr) - q_i^2] = M - K(I + M)dr \\ C + dC = \sum_i p_i q_i (1 - Kdr) \cos \alpha_i = C(1 - Kdr) \\ S + dS = \sum_i p_i q_i (1 - Kdr) \sin \alpha_i = S(1 - Kdr) \end{cases}$$

d'où :

$$(5) \quad \begin{cases} -dI = K(I + M)dr & -dM = K(I + M)dr \\ -dC = KCdr & -dS = KSdr \end{cases}$$

Passons au cas où le type de vibration, par rapport auquel se fait l'absorption, est quelconque et représenté par une direction OX' dans la sphère de Poincaré dont les cosinus directeurs sont α, β, γ par rapport aux axes habituels OX, OY, OZ . Soient OY', OZ' deux directions rectangulaires perpendiculaires à OX' et dont les cosinus directeurs sont $\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha''\beta''\gamma''$.

Un ensemble quelconque de vibrations représenté par IMCS par rapport aux anciens axes OX, OY, OZ sera par rapport aux nouveaux axes noté $I'M'C'S'$.

$$(6) \quad \begin{cases} I' = I \\ M' = \alpha M + \beta C + \gamma S \\ C' = \alpha' M + \beta' C + \gamma' S \\ S' = \alpha'' M + \beta'' C + \gamma'' S \end{cases}$$

Il est évident que si K est le coefficient qui intervient dans l'absorption suivant le type considéré de vibration on doit avoir par analogie avec le cas particulier étudié :

$$(7) \quad \begin{cases} -dI' = K(I' + M')dr & -dM' = K(I' + M')dr \\ -dC' = KC'dr & -dS' = KS'dr \end{cases}$$

On en déduit :

$$(8) \quad \begin{cases} -dI = K(I + \alpha M + \beta C + \gamma S)dr \\ -dM = K(\alpha I + M)dr \\ -dC = K(\beta I + C)dr \\ -dS = K(\gamma I + S)dr \end{cases}$$

Désignons maintenant par i, m, c, s les quantités $\frac{K}{h}, \frac{K\alpha}{h}, \frac{K\beta}{h}, \frac{K\gamma}{h}$, h étant un coefficient de proportionnalité choisi une fois pour toutes et que nous préciserons plus loin. On a :

$$(9) \quad \begin{cases} -dI = h(iI + mM + cC + sS)dr \\ -dM = h(mI + iM)dr \\ -dC = h(cI + iC)dr \\ -dS = h(sI + iS)dr \end{cases}$$

Remarquons que les quantités i, m, c, s sont par rapport à la sphère de Poincaré analogues à des quantités IMCS. Elles vérifient ici la relation $i^2 = m^2 + c^2 + s^2$ et caractérisent avec son intensité un mouvement elliptique qui permet de définir l'absorption considérée. Nous dirons, dans ce cas, que l'absorption est associée à un mouvement elliptique unique défini par i, m, c, s .

Nous admettrons maintenant qu'une absorption réelle n'est pas nécessairement du type précédent mais peut toujours être considérée, quant au résultat définitif, comme une succession d'absorptions du type précédent. Si ces diverses absorptions sont associées à des mouvements elliptiques définis par i_i, m_i, c_i, s_i , la modification effective des quantités I, M, C, S sera après le trajet dr :

$$(10) \quad dI = \Sigma dI_i, \quad dM = \Sigma dM_i, \quad dC = \Sigma dC_i, \quad dS = \Sigma dS_i,$$

dI_i, dM_i, dC_i, dS_i étant les modifications dues à l'absorption associée à i_i, m_i, c_i, s_i . Grâce à la forme linéaire et homo-

gène des relations (9) donnant dI_i , dM_i ... au bout du trajet dr en fonction de i_i , m_i , ... les quantités dI , dM , dC , dS seront dans le cas général données par des formules identiques où i , m , c , s sont égaux à Σi_i , Σm_i , Σc_i , Σs_i . Nous dirons, dans le cas général, que l'absorption est associée à un ensemble de mouvements elliptiques indépendants caractérisé par les quantités i , m , c , s . Ici, d'ailleurs, on a simplement :

$$i^2 \geq m^2 + c^2 + s^2.$$

Remarquons que la notion d'une absorption équivalente à une succession d'absorptions n'est pas seulement mathématique. Supposons, par exemple, que le milieu considéré contienne deux types distincts d'éléments absorbants. Il est évident que l'absorption sur un trajet dr par le milieu est équivalente à celle due à la succession de deux trajets ayant chacun la longueur dr dans les milieux, l'un identique au milieu considéré où l'on a supprimé tous les éléments absorbants de l'un des types, l'autre ne contenant que ces éléments. Il en résulte que la présence simultanée d'éléments absorbants conduit à l'addition des ensembles de mouvements elliptiques associées aux absorptions respectivement dues à chacun de ces éléments.

Il est évident que si l'on remplace l'ensemble des mouvements elliptiques associés à une absorption par un ensemble équivalent (c'est-à-dire de même i , m , c , s) l'absorption est la même. Or, la théorie de la polarisation partielle de la lumière montre qu'un ensemble de mouvements elliptiques est toujours équivalent à l'ensemble de deux mouvements elliptiques opposés. Toute absorption peut donc être considérée comme due à la succession d'une absorption suivant une vibration elliptique particulière et d'une absorption suivant l'ellipse opposée. Il est facile de voir que cela revient à supposer que, généralisant directement les hypothèses du premier cas, après la décomposition de la vibration lumineuse en deux vibra-

tions, l'une du type particulier, l'autre du type opposé, l'absorption modifie non seulement l'amplitude de la première vibration, dans le rapport $1 - Kdr$, mais aussi celle de la seconde, dans le rapport $1 - K'dr$, par exemple. Nous pouvons aussi effectuer le calcul direct.

Si la vibration par rapport à laquelle on effectue la décomposition de la vibration lumineuse est rectiligne suivant Ox , et si, avant l'absorption on a :

$$x = p \cos \omega t \quad y = q \cos (\omega t + \alpha)$$

après l'absorption on a :

$$(11) \quad x' = p(1 - Kdr) \cos \omega t \quad y' = q(1 - K'dr) \cos (\omega t + \alpha)$$

et par suite :

$$(12) \quad \begin{cases} -dI = [I(K + K') + M(K - K')]dr \\ -dM = [I(K - K') + M(K + K')]dr \\ -dC = (K + K')Cdr \\ -dS = (K + K')Sdr \end{cases}$$

Pour une vibration caractérisé par rapport à la sphère de Poincaré par les cosinus directeurs α, β, γ , on a :

$$(13) \quad \begin{cases} -dI = [I(K + K') + M\alpha(K - K') + C\beta(K - K') + S\gamma(K - K')]dr \\ -dM = [I\alpha(K - K') + M(K + K')]dr \\ -dC = [I\beta(K - K') + C(K + K')]dr \\ -dS = [I\gamma(K - K') + S(K + K')]dr \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{K}{h} & m_1 &= \frac{K\alpha}{h} & c_1 &= \frac{K\beta}{h} & s_1 &= \frac{K\gamma}{h} \\ i_2 &= \frac{K'}{h} & m_2 &= -\frac{K'\alpha}{h} & c_2 &= -\frac{K'\beta}{h} & s_2 &= -\frac{K'\gamma}{h} \end{aligned}$$

Le premier groupe de ces quantités représente une vibration elliptique d'intensité $\frac{K}{h}$ et de même type que celle par

rapport à laquelle on effectue la décomposition du faisceau, le second représente la vibration opposée avec une intensité $\frac{K'}{h}$. Si nous désignons par i, m, c, s les caractéristiques de l'ensemble de ces deux vibrations :

$$i = \frac{K + K'}{h} \quad m = \frac{K - K'}{h} \alpha \quad c = \frac{K - K'}{h} \beta \quad s = \frac{K - K'}{h} \gamma$$

et les formules (13) deviennent les formules (9).

Nous pouvons vérifier sur ces formules que :

$$d(I^2 - M^2 - C^2 - S^2) = 2[IdI - MdM - CdC - SdS] = 0$$

si $I^2 - M^2 - C^2 - S^2 = 0$ ce qui est en accord avec le fait que toute vibration lumineuse purement elliptique se conserve purement elliptique tout le long du trajet du faisceau. Les transformations que nous considérons ici ne sont d'ailleurs pas les plus générales qui possèdent cette propriété. Ces dernières dépendent en effet de 7 paramètres ; celles que nous considérons ici ne dépendent que de 4, elles excluent le cas d'un milieu doué de pouvoir rotatoire.

Pour introduire les 3 paramètres qui manquent il suffit d'admettre que les modifications d'amplitudes considérées précédemment s'accompagnent toujours de modifications de phase. Sans entrer dans le détail du calcul, nous pouvons toujours considérer comme successives les modifications d'amplitude et celles de phase. Ces dernières, en utilisant le résultat bien connu de la théorie de Poincaré, conduisent à une rotation infiniment petite de l'ensemble des vecteurs élémentaires représentant les vibrations lumineuses du faisceau, autour d'un axe passant par le centre de la sphère de Poincaré. Soit θdr l'angle de rotation et p, q, r les cosinus directeurs de l'axe, la rotation considérée conduira aux modifications suivantes des quantités I, M, C, S :

$$(14) \quad \begin{cases} dI = 0 \\ dC = (rM - pS)\theta dr \end{cases} \quad \begin{cases} dM = (qS - rC)\theta dr \\ dS = (pC - qM)\theta dr \end{cases}$$

Dans le cas général où la rotation accompagne une absorption, ces modifications des quantités doivent s'ajouter aux modifications dues à l'absorption (Eq. 9). Les formules contiendront alors 7 paramètres indépendants : hi , hm , hc , hs qui caractérisent l'absorption et $p\theta$, $q\theta$, $r\theta$ qui caractérisent la rotation, ce sont les plus générales qui transforment une vibration elliptique en une autre purement elliptique.

En ce qui concerne les rôles respectifs des constantes d'absorption et celles de rotation, nous ferons les 2 remarques suivantes que nous utiliserons par la suite :

1° L'énergie absorbée ne dépend que des constantes d'absorption.

2° La modification d'une lumière naturelle sur un trajet infiniment petit ne dépend que des constantes d'absorption.

Ces remarques deviennent évidentes si l'on constate qu'une rotation infiniment petite n'entraîne aucune modification de l'énergie dans le cas général, les modifications de polarisation ne dépendent que de M , C , S et par suite étant nulles pour une lumière initialement naturelle.

Ces remarques nous permettront de faire abstraction des constantes de rotation et par suite de les supposer nulles.

Après avoir jusqu'à présent utilisé les quantités I , M , C , S revenons enfin aux quantités μ , ν , γ , σ . Désignant par μ_0 , ν_0 , γ_0 , σ_0 les quantités correspondantes à i , m , c , s , nous avons :

$$(15) \quad \begin{cases} -d\mu = 2h[\mu\mu_0 + \gamma\gamma_0 + \sigma\sigma_0]dr \\ -d\nu = 2h[\nu\nu_0 + \gamma\gamma_0 + \sigma\sigma_0]dr \\ -d\gamma = h[(\mu + \nu)\gamma_0 + \gamma(\mu_0 + \nu_0)]dr \\ -d\sigma = h[(\mu + \nu)\sigma_0 + \sigma(\mu_0 + \nu_0)]dr \end{cases}$$

En particulier si l'absorption est isotrope :

$$\mu_0 = \nu_0 = \frac{K}{2h} \quad \gamma_0 = \sigma_0 = 0.$$

on a :

$$(16) \quad \begin{cases} -d\mu = \mu K dr & -d\nu = \nu K dr \\ -d\gamma = \gamma K dr & -d\sigma = \sigma K dr \end{cases}$$

et en intégrant :

$$(17) \quad \begin{cases} \mu(r) = \mu(o)e^{-Kr} & \nu(r) = \nu(o)e^{-Kr} \\ \gamma(r) = \gamma(o)e^{-Kr} & \sigma(r) = \sigma(o)e^{-Kr} \end{cases}$$

On voit que la polarisation n'est pas modifiée, chacune des composantes et en particulier l'énergie sont multipliées par le facteur e^{-Kr} . Il ne s'introduit plus qu'une constante pour caractériser l'absorption.

Dans le cas général, si le milieu est homogène tout le long du faisceau, on est ramené à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ces coefficients sont variables si le milieu n'est pas homogène.

3. Absorption en un point de l'espace. — Nous n'avons jusqu'à présent jamais très bien précisé en valeur absolue les paramètres $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ qui caractérisent l'excitation en un point du milieu. Nous conviendrons que la quantité $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ représente la densité de l'énergie rayonnante au point considéré du milieu. Les quantités $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ sont donc de la nature d'une énergie par unité de volume.

Si les différents faisceaux qui excitent un point P du milieu sont indépendants de phase, leurs effets s'ajoutent simplement c'est-à-dire que les paramètres, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ caractérisant l'excitation au point P sont respectivement les sommes des paramètres $\mathcal{L}^i$, $\mathcal{C}^i$, $\mathcal{S}^i$ correspondant à chacun des faisceaux excitateurs. On est donc amené à calculer les paramètres $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ dus à un seul faisceau excitateur connaissant les paramètres μ , ν , γ , σ caractérisant ce faisceau et la section dS du faisceau au point P.

Soient Px_i les axes de coordonnées auxquels sont rapportées les quantités $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ et soit Px'_3 la direction de propagation du faisceau, Px'_1 et Px'_2 étant les axes auxquels sont rapportées les quantités μ , ν , γ , σ . Si $\mathcal{L}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{S}'$ sont les valeurs

des composantes de l'excitation rapportées aux axes Px'_i , il est évident que les quantités :

$$\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \mathcal{L}'_3, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3, \mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3$$

sont respectivement proportionnelles aux quantités.

$$\mu, \nu, 0, 0, 0, \gamma, 0, 0, \sigma.$$

Nous allons calculer le coefficient de proportionnalité K' .

Si V est la vitesse de propagation de l'énergie le long du faisceau, vitesse qui sera supposée au moins en première approximation indépendante de la polarisation du faisceau ainsi que de sa direction, la densité de l'énergie au point P sera :

$$\frac{\mu + \nu}{VdS} = \mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}'_2 = K'(\mu + \nu),$$

d'où :

$$K' = \frac{1}{VdS}.$$

Les quantités $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \mathcal{L}'_3, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3, \mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3$, seront respectivement égales à :

$$(1) \quad \frac{\mu}{VdS}, \frac{\nu}{VdS}, 0, 0, 0, \frac{\gamma}{VdS}, 0, 0, \frac{\sigma}{VdS}$$

et les quantités $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$, s'obtiendront par le changement d'axes Px'_i, Px_i .

Dans la première partie, nous avons été conduits à supposer que les quantités caractéristiques de l'émission d'une source ne pouvaient dépendre de l'excitation que par l'intermédiaire des quantités $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$. Ici et pour les mêmes raisons nous supposons que l'énergie absorbée par un élément du milieu pendant l'unité de temps ne dépend que des quantités $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ de l'excitation et au voisinage d'un point du milieu sera proportionnelle au volume dv de l'élément considéré du milieu.

Utilisons la forme tensorielle $\mathcal{E}^{ij}$ liée aux $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, pour définir l'excitation. Si $d\mathfrak{J}$ est l'énergie absorbée par unité de temps par un élément de volume dv , on doit avoir :

$$(2) \quad d\mathfrak{J} = e_{ij} \mathcal{E}^{ij} dv.$$

La quantité $d\mathfrak{J}$ ne dépend pas du choix des axes de référence servant à mesurer les composantes de $\mathcal{E}^{ij}$, $d\mathfrak{J}$ est donc une quantité invariante. Les e_{ij} forment donc un tenseur du second ordre. Elles se transforment comme les $\mathcal{E}^{ij}$ par un choix d'axes rectangulaires. Pour revenir aux quantités habituelles $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, faisons correspondre aux e_{ij} des quantités :

$$l_1, l_2, l_3, c_1, c_2, c_3, s_1, s_2, s_3,$$

de la même façon que les $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, correspondent aux $\mathcal{E}^{ij}$. On aura :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{J} = & l_1 \mathcal{E}_1 + l_2 \mathcal{E}_2 + l_3 \mathcal{E}_3 + 2c_1 \mathcal{C}_1 + 2c_2 \mathcal{C}_2 \\ & + 2c_3 \mathcal{C}_3 + 2s_1 \mathcal{S}_1 + 2s_2 \mathcal{S}_2 + 2s_3 \mathcal{S}_3 \end{aligned} \right.$$

Ces quantités l , c , s , ont pour dimension l'inverse d'un temps.

Nous allons maintenant établir la liaison entre ces quantités l , c , s et les quantités μ_0 , ν_0 , γ_0 , σ_0 qui caractérisent l'absorption le long d'un faisceau.

Soit en effet un faisceau F se propageant suivant Pz , ayant une section droite d'aire dS au point P. Soient μ , ν , γ , σ ses caractéristiques par rapport à des axes Px , Py rectangulaires et perpendiculaires à Pz . Soient l' , c' , s' les quantités, caractérisant l'absorption, rapportées à ces axes. Considérons l'élément du faisceau compris entre les sections $z=0$, $z=dr$. Son volume est $dv = dS \times dr$. Les quantités $\mathcal{E}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{S}'$, qui caractérisent l'excitation du milieu au voisinage de P, sont, en ne considérant que la contribution du faisceau F :

$$\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \mathcal{E}'_3, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3, \mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3$$

respectivement égales à :

$$\frac{\mu}{VdS}, \frac{\nu}{VdS}, 0, 0, 0, \frac{\gamma}{VdS}, 0, 0, \frac{\sigma}{VdS}.$$

L'énergie absorbée par unité de temps dans le volume dv sera donc :

$$(4) \quad d\mathfrak{D} = (l'_1\mu + l'_2\nu + 2c'_3\gamma + 2s'_3\sigma) \frac{dv}{VdS}.$$

Or, cette quantité est aussi égale (§ 2, Eq. 15) à :

$$(5) \quad -(d\mu + d\nu) = 2h[\mu\mu_0 + \nu\nu_0 + \gamma\gamma_0 + 2\sigma\sigma_0]dr.$$

Ces deux expressions sont identiques si l'on a :

$$(6) \quad \begin{cases} \mu_0 = l'_1 & \nu_0 = l'_2 \\ \gamma_0 = c'_3 & \sigma_0 = s'_3 \end{cases}$$

et de plus $h = \frac{1}{2V}$.

Les quantités $\mu_0, \nu_0, \gamma_0, \sigma_0$ qui caractérisent l'absorption le long d'un faisceau ne sont donc pas des fonctions quelconques de la direction du faisceau, elles s'expriment uniquement en fonction des 9 quantités l, c, s . Au contraire les paramètres caractérisant la rotation le long d'un faisceau ne paraissent pas assujettis à des lois analogues.

RÉSUMÉ

Les recherches exposées dans ce mémoire ont eu pour but initial le désir de mettre de l'ordre dans les résultats expérimentaux que les divers auteurs ont obtenus en ce qui concerne la polarisation des radiations émises par résonance optique et plus généralement par fluorescence. On a pu montrer que les relations entre les résultats expérimentaux d'une part (état de polarisation des divers faisceaux émis dans l'espace par le milieu en résonance) et les conditions d'excitation d'autre part (état de polarisation du faisceau exciteur et direction de ce dernier) ne contenaient qu'un nombre fini de paramètres caractérisant l'état du milieu. Pour un état donné de ce milieu, un nombre fini d'expériences convenablement choisies suffit donc à déterminer ces paramètres et permet de prévoir les résultats pour une excitation quelconque.

La première partie a trait à la recherche de ces relations. La solution du problème réside dans l'utilisation de quantités qui sont, pour un ensemble de vibrations dans l'espace, la généralisation des 4 paramètres utilisés déjà par Stokes pour caractériser la polarisation partielle d'un faisceau de lumière. Ici les paramètres utilisés forment des groupes de 9 quantités. Ils permettent de représenter soit l'état de polarisation des divers faisceaux émis dans l'espace par le milieu fluorescent, soit l'état de polarisation et la direction du ou des faisceaux excitateurs. Dans le premier cas, ce sont les paramètres caractéristiques de l'émission et ils sont désignés par $L_1, L_2, L_3, C_1, C_2, C_3, S_1, S_2, S_3$; dans l'autre cas, ce sont les paramètres caractéristiques de l'excitation et ils sont désignés

par $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$. Par changement d'axes de coordonnées ces quantités se transforment comme des composantes tensorielles. Les relations entre les L, C, S et les $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ sont linéaires et il s'introduit dans le cas général 81 constantes a_i^j qui sont caractéristiques de l'état du milieu. Les symétries réduisent le nombre de celles parmi ces quantités qui sont vraiment indépendantes. Ainsi si la symétrie du milieu est celle d'un champ magnétique le nombre de ces quantités est réduit à 19 et il est réduit à 3 dans le cas d'isotropie. Ces constantes peuvent être combinées de façon à former un tenseur de 4^e ordre A_{st}^{ij} . Cette forme tensorielle a été utilisée pour calculer les 3 caractéristiques d'un milieu constitué par un assemblage d'éléments anisotropes identiques à l'aide des 3 invariants $A_{ss}^{ii}, A_{ts}^{is}, A_{si}^{is}$ du tenseur A_{st}^{ij} caractérisant ces éléments anisotropes. La discussion des résultats a mis en évidence en particulier dans le cas d'isotropie l'intérêt spécial d'une excitation en lumière circulaire tant au point de vue théorique qu'expérimental. Quelques exemples ont été traités.

L'adaptation au problème initial des quantités L, C, S et $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ pour caractériser la polarisation partielle de la lumière a fait penser à utiliser ces quantités dans des questions analogues. Dans la deuxième partie on a traité le cas de la dépolarisation qui se produit lors d'un déplacement de l'élément vibreur entre l'instant de l'excitation et celui de l'émission : chocs contre les molécules de gaz étranger, mouvement brownien de rotation dans les solutions fluorescentes, rotation de Larmor due à la présence d'un champ magnétique. On a donné les formules qui relient les paramètres de la nouvelle émission à ceux de l'émission normale, c'est-à-dire de l'émission qui se produirait si les éléments vibreurs ne s'étaient pas déplacés. Si l'ensemble de ces déplacements est isotrope, il ne s'introduit que deux coefficients $\overline{\cos^2 \alpha}$ et $\overline{\cos \alpha}$, α étant l'angle d'une direction liée à l'un des éléments

vibrateurs déplacés avec sa direction normale. Ces résultats concordent avec ceux de F. Perrin qui sont limités au cas de l'analyse rectiligne d'une émission et n'introduisent que $\overline{\cos^2 \alpha}$. Dans le cas où sont simultanément considérés des chocs de seconde espèce on a obtenu une formule qui donne la dépolarisation en fonction de la pression du gaz étranger et effectué une comparaison satisfaisante avec les résultats expérimentaux de Keussler. On a traité également le cas où les déplacements sont dus à la présence d'un champ magnétique, retrouvé les résultats connus et indiqué des résultats nouveaux.

Dans la troisième partie on a traité une autre application moins directe des paramètres utilisés dans les problèmes précédents. Il s'agit de l'absorption des faisceaux dans des milieux anisotropes. On a montré l'intérêt de l'introduction de 9 quantités $l_1, l_2, l_3, c_1, c_2, c_3, s_1, s_2, s_3$ caractérisant complètement l'absorption d'un faisceau de direction quelconque et analogues à des quantités L, C, S ou $\mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$.

Toutes ces recherches ont été suggérées par le travail expérimental sur la résonance optique des vapeurs des métaux de la famille du mercure que j'ai effectué au laboratoire de physique de l'Ecole Normale. Je dois remercier mes Maîtres, M. Abraham, Directeur du laboratoire et M. E. Bloch de tout ce dont je leur suis redevable, l'aide matérielle, les conseils avisés et les encouragements qu'ils n'ont cessé de me prodiguer durant tout mon travail. Qu'il me soit permis de leur exprimer ici ma profonde reconnaissance.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Spectres de bandes et structure des molécules.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 21 janvier 1929.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

L'Assesseur,

JEAN PERRIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Pour le Recteur, l'Inspecteur de l'Académie,

A. THYBAUT.

